第4講　平面図形

30°・60°・45°の直角三角形と三平方 → 正六角形とおうぎ形 → 円と弦・弓形の面積 → 長方形の折り返し → 接する円

要点の確認	例題	練習（入試の形）	確認テスト
10分	20分	35分	10分

要点　平面図形の入試で使う6つの道具

- **① 特別な直角三角形**　30°・60°・90° の三角形の辺の比は $1:2:\sqrt{3}$（いちばん短い辺が30°の向かい、斜辺が2）。45°・45°・90° は $1:1:\sqrt{2}$。正三角形や正方形は、**垂線や対角線をひいて**この三角形を作る。
- **② 三平方の定理**　直角三角形の直角をはさむ2辺を a, b、斜辺を c とすると $a^2+b^2=c^2$。1辺 a の正三角形の高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$、面積は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$。
- **③ 円**　中心から弦にひいた垂線は弦を2等分する。円の接線は接点を通る半径に垂直。2つの円が接するとき、中心間の距離は半径の和（外接）か差（内接）。
- **④ おうぎ形**　半径 r、中心角 a° のとき、面積 $\pi r^2 \times \dfrac{a}{360}$、弧の長さ $2\pi r \times \dfrac{a}{360}$。周の長さは「弧＋半径2本」。**弓形**（弦と弧で囲まれた部分）＝おうぎ形－三角形。
- **⑤ 折り返し**　折り返した図形はもとの図形と合同。**重なる辺の長さ・角の大きさは等しい**。わからない長さを x とおき、直角三角形で三平方の定理の式を作る。
- **⑥ 正多角形**　正 n 角形の1つの内角は $\dfrac{180^\circ \times (n-2)}{n}$（正六角形は 120°）。正六角形は、中心と頂点を結ぶと**6つの正三角形**に分かれる。

例題1　特別な直角三角形で長さと面積

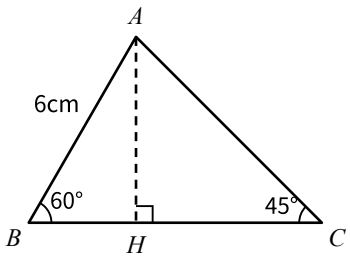
右の図の $\triangle ABC$ で、$\angle ABC = 60^\circ$、$\angle ACB = 45^\circ$、$AB = 6$ cm である。頂点 A から辺 BC に垂線 AH をひく。

(1)　AH の長さを求めなさい。

(2)　辺 BC の長さを求めなさい。

(3)　辺 AC の長さを求めなさい。

(4)　$\triangle ABC$ の面積を求めなさい。



解き方　(1)　$\triangle ABH$ は30°・60°・90° の直角三角形で、$BH:AB:AH=1:2:\sqrt{3}$。$BH=3$、$AH=3\sqrt{3}$

答　$3\sqrt{3}$ cm

(2)　$\triangle AHC$ は直角二等辺三角形で $HC=AH=3\sqrt{3}$。$BC=BH+HC=3+3\sqrt{3}$　　**答**　$3+3\sqrt{3}$ cm

(3)　$AC=\sqrt{2}\times AH=3\sqrt{6}$　　**答**　$3\sqrt{6}$ cm

(4)　$\dfrac{1}{2}\times(3+3\sqrt{3})\times 3\sqrt{3}=\dfrac{9\sqrt{3}+27}{2}$　　**答**　$\dfrac{27+9\sqrt{3}}{2}$ cm²

※ 30°・60° の三角形は「どの辺が1・2・√3 か」を図に書きこんでから計算する。

例題2　正六角形とおうぎ形 —— 対角線・面積・弧の長さ

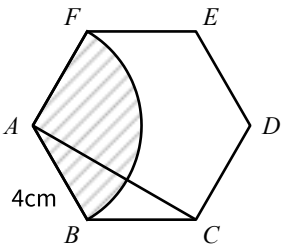
右の図のように、1辺が 4 cm の正六角形 $ABCDEF$ がある。斜線部分は、点 A を中心とし、半径 AB の円の一部（おうぎ形 ABF）である。円周率は π とする。

(1)　対角線 AC の長さを求めなさい。

(2)　正六角形 $ABCDEF$ の面積を求めなさい。

(3)　おうぎ形 ABF の面積を求めなさい。

(4)　おうぎ形 ABF の周の長さを求めなさい。



解き方　(1)　$\angle ABC = 120^\circ$。B から AC に垂線 BM をひくと、$\triangle ABM$ は30°・60°・90° の三角形で $AM = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 4 = 2\sqrt{3}$。$AC = 2AM = 4\sqrt{3}$　　**答**　$4\sqrt{3}$ **cm**

(2)　中心と頂点を結ぶと、1辺 4 cm の正三角形が6つ。$\dfrac{\sqrt{3}}{4} \times 4^2 \times 6 = 24\sqrt{3}$　　**答**　$24\sqrt{3}$ **cm²**

(3)　中心角は正六角形の内角で $\angle BAF = 120^\circ$。$\pi \times 4^2 \times \dfrac{120}{360} = \dfrac{16}{3}\pi$　　**答**　$\dfrac{16}{3}\pi$ **cm²**

(4)　弧 BF の長さは $2\pi \times 4 \times \dfrac{120}{360} = \dfrac{8}{3}\pi$。半径2本をたして　$8 + \dfrac{8}{3}\pi$　　**答**　$8 + \dfrac{8}{3}\pi$ **cm**

※「周の長さ」は弧だけでなく、**半径2本もたす**。

例題3　円と弦 —— 中心角・弦の長さ・弓形の面積

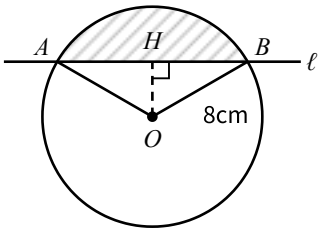
右の図のように、半径 8 cm の円 O と、中心 O からの距離が 4 cm の直線 ℓ が、2点 A, B で交わっている。円周率は π とする。

(1)　$\angle AOB$ の大きさを求めなさい。

(2)　弦 AB の長さを求めなさい。

(3)　$\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

(4)　斜線部分（弦 AB と短い方の弧 AB で囲まれた部分）の面積を求めなさい。



解き方　(1)　O から ℓ に垂線 OH をひく。$\triangle OHB$ は斜辺 $OB = 8$、$OH = 4$ で $OB : OH = 2 : 1$ だから、30°・60°・90° の三角形で $\angle BOH = 60^\circ$。$\angle AOB = 2 \times 60^\circ = 120^\circ$　　**答**　120°

(2)　$HB = \sqrt{3} \times OH = 4\sqrt{3}$。$OH$ は弦を2等分するので $AB = 8\sqrt{3}$　　**答**　$8\sqrt{3}$ **cm**

(3)　$\dfrac{1}{2} \times 8\sqrt{3} \times 4 = 16\sqrt{3}$　　**答**　$16\sqrt{3}$ **cm²**

(4)　おうぎ形 OAB（中心角 120°）$-\triangle OAB$。$\pi \times 8^2 \times \dfrac{120}{360} - 16\sqrt{3} = \dfrac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}$　　**答**　$\dfrac{64}{3}\pi - 16\sqrt{3}$ **cm²**

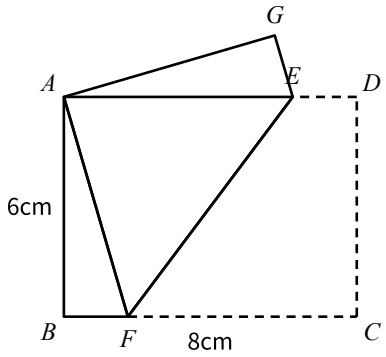
例題4　長方形の折り返し ―― 等しい長さを x とおく

右の図のように、$AB = 6$ cm、$BC = 8$ cm の長方形 $ABCD$ を、頂点 C が頂点 A に重なるように折った。折り目を EF（E は辺 AD 上、F は辺 BC 上）とし、頂点 D が移った点を G とする。

(1)　線分 FC の長さを求めなさい。

(2)　折り目 EF の長さを求めなさい。

(3)　$\triangle AEF$ の面積を求めなさい。



解き方　(1)　折り返すと $AF = FC$。$FC = x$ cm とすると $BF = 8 - x$。$\triangle ABF$ で三平方の定理より

$6^2 + (8-x)^2 = x^2$、$36 + 64 - 16x = 0$、$x = \dfrac{25}{4}$　　**答**　$\dfrac{25}{4}$ **cm**

(2)　折り目 EF は線分 AC の垂直二等分線になる。$AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$、$AC$ の中点を M とすると $AM = 5$。

$\triangle AFM$ で $FM = \sqrt{\left(\dfrac{25}{4}\right)^2 - 5^2} = \sqrt{\dfrac{225}{16}} = \dfrac{15}{4}$

長方形の中心 M について点対称なので $EM = FM$。$EF = \dfrac{15}{4} \times 2 = \dfrac{15}{2}$　　**答**　$\dfrac{15}{2}$ **cm**

(3)　点対称だから $AE = CF = \dfrac{25}{4}$。AE を底辺とすると高さは $AB = 6$。$\dfrac{1}{2} \times \dfrac{25}{4} \times 6 = \dfrac{75}{4}$　　**答**　$\dfrac{75}{4}$ **cm²**

スピード練習 **1問1分で** 目標8分

(1) 30°・60°・90° の直角三角形で、斜辺が 10 cm のとき、いちばん短い辺の長さと、残りの辺の長さを求めなさい。

答

(2) 1辺が 6 cm の正方形の対角線の長さを求めなさい。

答

(3) 1辺が 8 cm の正三角形の面積を求めなさい。

答

(4) 半径 6 cm、中心角 150° のおうぎ形の面積を求めなさい。円周率は π とする。

答

(5) 半径 9 cm、中心角 40° のおうぎ形の弧の長さを求めなさい。円周率は π とする。

答

(6) 正八角形の1つの内角の大きさを求めなさい。

答

(7) 半径 5 cm の円で、中心からの距離が 3 cm の弦の長さを求めなさい。

答

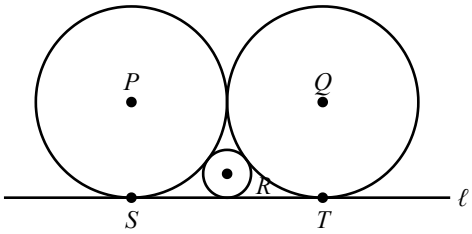
(8) 半径 4 cm の円 P と半径 1 cm の円 Q が外接している。2つの円の中心間の距離を求めなさい。

答

練習1　入試の形で解こう（1）　直線に接する3つの円

目標12分

(1) 右の図のように、半径 3 cm の2つの円 P, Q が外接し、どちらも直線 ℓ に接している。円 P, Q と ℓ の接点をそれぞれ S, T とする。また、円 R は、円 P, Q の両方に外接し、ℓ にも接している。円周率は π とする。
線分 ST の長さを求めなさい。



答

(2) 円 P, 円 Q と直線 ℓ で囲まれた部分の面積を求めなさい（円 R の部分もふくめる）。

答

(3) 円 R の半径を求めなさい。

答

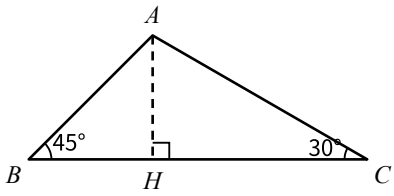
(4) $\triangle PQR$ の面積を求めなさい。

答

練習2　入試の形で解こう（2）　45°・30°の三角形と円

目標12分

(1) 右の図の $\triangle ABC$ で、$\angle ABC = 45^\circ$、$\angle ACB = 30^\circ$、$AB = 4\sqrt{2}$ cm である。頂点 A から辺 BC に垂線 AH をひく。円周率は π とする。
AH の長さを求めなさい。



答

(2) 辺 AC の長さを求めなさい。

答

(3) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。

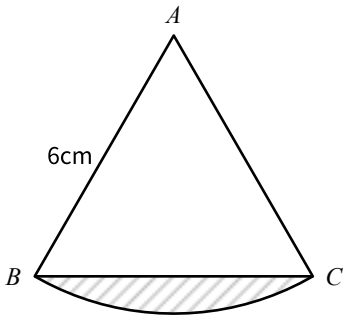
答

(4) 3点 A, B, C を通る円の面積を求めなさい。

答

確認テスト **10分で解こう**　　点数　　／100点

(1) 右の図は、1辺が 6 cm の正三角形 ABC と、点 A を中心とし、半径 AB の円の一部（弧 BC）である。円周率は π とする。
$\triangle ABC$ の高さを求めなさい。 **[25点]**



答

(2) $\triangle ABC$ の面積を求めなさい。 **[25点]**

答

(3) おうぎ形 ABC の面積を求めなさい。 **[25点]**

答

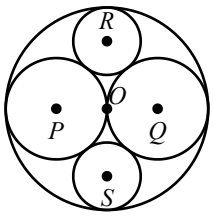
(4) 斜線部分（弧 BC と辺 BC で囲まれた部分）の面積を求めなさい。 **[25点]**

答

入試にチャレンジ1　円の中で接する円・長方形と45°

80点以上をめざす人へ

(1) 右の図のように、半径 6 cm の円 O の中に、半径 3 cm の円 P, Q が、たがいに O で外接し、円 O に内接している。円 R, S は、円 P, Q に外接し、円 O に内接している。円 R の半径を求めなさい。

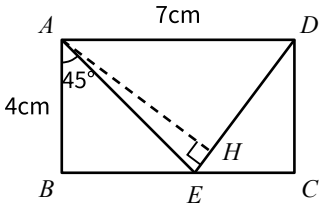


答

(2) (1)の図で、円 O の内部にあって、4つの円 P, Q, R, S のどれの内部にもない部分の面積を求めなさい。円周率は π とする。

答

(3) 右の図のように、$AB = 4$ cm、$AD = 7$ cm の長方形 $ABCD$ がある。辺 BC 上に $\angle BAE = 45^\circ$ となる点 E をとる。線分 DE の長さを求めなさい。



答

(4) (3)の図で、点 A から線分 DE に垂線 AH をひく。AH の長さを求めなさい。

答

解答（答えと短い解き方）

第4講　平面図形

スピード練習　1問1分で

(1)　5 cm、$5\sqrt{3}$ cm

辺の比は $1:2:\sqrt{3}$。斜辺10が「2」にあたるので、短い辺は5、残りは $5\sqrt{3}$

(2)　$6\sqrt{2}$ cm

直角二等辺三角形の斜辺だから $6\times\sqrt{2}=6\sqrt{2}$

(3)　$16\sqrt{3}$ cm²

高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 8=4\sqrt{3}$。$\dfrac{1}{2}\times 8\times 4\sqrt{3}=16\sqrt{3}$

(4)　15π cm²

$\pi\times 6^2\times\dfrac{150}{360}=36\pi\times\dfrac{5}{12}=15\pi$

(5)　2π cm

$2\pi\times 9\times\dfrac{40}{360}=18\pi\times\dfrac{1}{9}=2\pi$

(6)　135°

$\dfrac{180^\circ\times(8-2)}{8}=135^\circ$

(7)　8 cm

中心から弦にひいた垂線は弦を2等分する。半分の長さは $\sqrt{5^2-3^2}=4$。弦は $4\times 2=8$

(8)　5 cm

外接するとき、中心間の距離は半径の和。$4+1=5$

練習1　入試の形で解こう（1）　直線に接する3つの円

(1)　6 cm

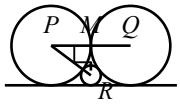
四角形 $PSTQ$ は、$PS\perp\ell$、$QT\perp\ell$、$PS=QT=3$ だから長方形。$ST=PQ=3+3=6$

(2)　$18-\dfrac{9}{2}\pi$ cm²

長方形 $PSTQ$（18）から、中心角 90° のおうぎ形2つ（$\dfrac{9}{2}\pi$）をひく。

(3)　$\dfrac{3}{4}$ cm

$PM=3$、$RM=3-r$、$PR=3+r$。三平方の定理で $3^2+(3-r)^2=(3+r)^2$



$\triangle PMR$ で三平方

(4)　$\dfrac{27}{4}$ cm²

底辺 $PQ=6$、高さ $RM=3-\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{4}$。$\dfrac{1}{2}\times 6\times\dfrac{9}{4}=\dfrac{27}{4}$

練習2　入試の形で解こう（2）　45°・30° の三角形と円

(1)　4 cm

$\triangle ABH$ は直角二等辺三角形で、$AH=AB\div\sqrt{2}=4$

(2)　8 cm

$\triangle AHC$ は30°・60°・90° の三角形で、$AH:AC=1:2$。$AC=2\times 4=8$

(3)　$8+8\sqrt{3}$ cm²

$BH=AH=4$、$HC=\sqrt{3}\times AH=4\sqrt{3}$。$BC=4+4\sqrt{3}$。$\dfrac{1}{2}\times(4+4\sqrt{3})\times 4=8+8\sqrt{3}$

(4) 32π cm²

中心角 $\angle AOB = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$ で $\triangle OAB$ は正三角形。半径 $AB = 4\sqrt{2}$

確認テスト　10分で解こう

(1) $3\sqrt{3}$ cm

A から BC に垂線をひくと、30°・60°・90° の三角形ができる。高さは $\dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 6 = 3\sqrt{3}$

(2) $9\sqrt{3}$ cm²

$\dfrac{1}{2} \times 6 \times 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

(3) 6π cm²

中心角は $\angle BAC = 60^\circ$。$\pi \times 6^2 \times \dfrac{60}{360} = 6\pi$

(4) $6\pi - 9\sqrt{3}$ cm²

おうぎ形 ABC から $\triangle ABC$ をひく。$6\pi - 9\sqrt{3}$

入試にチャレンジ1　円の中で接する円・長方形と45°

(1) 2 cm

$OR = 6 - r$（内接）、$PR = 3 + r$（外接）、$OP = 3$。$3^2 + (6-r)^2 = (3+r)^2$

(2) 10π cm²

$\pi \times 6^2 - \pi \times 3^2 \times 2 - \pi \times 2^2 \times 2 = 36\pi - 18\pi - 8\pi = 10\pi$

(3) 5 cm

$\triangle ABE$ は直角二等辺三角形で $BE = AB = 4$、$EC = 7 - 4 = 3$。$\triangle DEC$ で $DE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

(4) $\dfrac{28}{5}$ cm

$\triangle AED = \dfrac{1}{2} \times 7 \times 4 = 14$。底辺を $DE = 5$ とみて　$\dfrac{1}{2} \times 5 \times AH = 14$

くわしい解き方は創心館出版の攻略テキスト（別冊解答）に載っています。