第3講　確率

さいころ×正多角形・座標平面の点／カード（戻す・戻さない・同時に）／すごろく・点の移動を3回 —— 表・樹形図・余事象

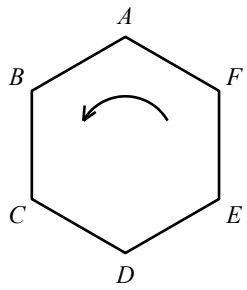
要点の確認	例題	練習（入試の形）	確認テスト
10分	20分	35分	10分

要点　確率で使う6つの道具

- **① 全部の場合の数を先に出す**　さいころ2回（大小2つ）は $6\times6=36$ 通り、3回は $6\times6\times6=216$ 通り。n 枚のカードから1枚ずつ2枚取り出すとき、**戻さない** $n\times(n-1)$ 通り、**戻す** $n\times n$ 通り、**同時に**2枚は $n\times(n-1)\div2$ 通り（同時に3枚は $n\times(n-1)\times(n-2)\div6$ 通り）。
- **② 表・樹形図**　2回なら 6×6 の表に○をつける。3回は「**組 × 並べ方**」で数える：3つとも異なる組は6通り、2つが同じ組は3通り、3つとも同じ組は1通りの並べ方がある。
- **③ 余事象**　「少なくとも」「三角形ができる」などは、**そうならない場合**（1つもない・同じ点・一直線）を数えて全体からひく。
- **④ 正多角形の頂点を動く点**　正 n 角形の頂点を n 個進むと元の頂点にもどる。**正五角形では6進む＝1進む**（B に止まる目は 1 と 6 の2通り）。
- **⑤ 正六角形の頂点でできる三角形は3種類**　正三角形（$\triangle ACE$）／直角三角形（$\triangle ABD$：**中心を通る対角線をふくむ**。直径に対する円周角は 90°）／120° の角をもつ二等辺三角形（$\triangle ABC$）。
- **⑥ 座標平面の点**　$P(a,\ b)$ は36個の格子点のどれか。図にかいて数える。「面積が等しい点」は**平行な直線の上**にならぶ。

例題1　正六角形の頂点 —— 三角形の種類で数える

右の図のように、正六角形 $ABCDEF$ がある。箱の中に 1, 2, 3, 4, 5 の数字が1つずつ書かれた5枚のカードが入っている。この箱からカードを1枚ずつ続けて2枚取り出し（取り出したカードは戻さない）、1枚目の数を a、2枚目の数を b とする。頂点 A から反時計回りに頂点を a 個進んだ点を P、b 個進んだ点を Q とする。どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。



(1)　点 P が頂点 D になる確率を求めなさい。

(2)　$\triangle APQ$ が正三角形になる確率を求めなさい。

(3)　$\triangle APQ$ が直角三角形になる確率を求めなさい。

解き方　取り出し方は全部で $5\times4=20$ 通り。P, Q はいつも A と異なる別々の頂点なので、$\triangle APQ$ は必ずできる。

(1)　$a=3$ のとき。b は残りの4枚から4通り。$\dfrac{4}{20}=\dfrac{1}{5}$　　**答**　$\dfrac{1}{5}$

(2)　正三角形は $\triangle ACE$ だけ。$(a,\ b)=(2,\ 4),(4,\ 2)$ の2通り。$\dfrac{2}{20}=\dfrac{1}{10}$　　**答**　$\dfrac{1}{10}$

(3)　中心を通る対角線（AD, BE, CF）を1辺にふくむ三角形が直角三角形。$\{P,\ Q\}$ の組は

AD をふくむ：$\{D,\ B\},\{D,\ C\},\{D,\ E\},\{D,\ F\}$　BE をふくむ：$\{B,\ E\}$　CF をふくむ：$\{C,\ F\}$　の6組。

どの組も P と Q の入れかえで2通りずつあるから $6\times2=12$ 通り。$\dfrac{12}{20}=\dfrac{3}{5}$　　**答**　$\dfrac{3}{5}$

※ 残りの $\{B,\ C\},\{E,\ F\},\{B,\ F\}$ は 120° の角をもつ二等辺三角形。3種類の合計 $2+12+6=20$ で全部になることを確かめる。

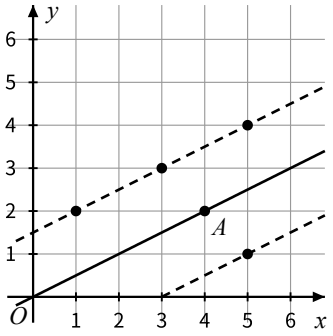
例題2　座標平面の点 —— 面積が等しい点は平行線の上

大小2つのさいころを同時に投げ、大きいさいころの出た目を a、小さいさいころの出た目を b として、点 $P(a,\ b)$ をとる。また、点 $A(4,\ 2)$ をとり、原点を O とする。どの目が出ることも同様に確からしいものとする。

(1)　3点 O, A, P が一直線上にならぶ確率を求めなさい。

(2)　$\triangle OAP$ の面積が 3 になる確率を求めなさい。

(3)　$\triangle OAP$ ができて、その面積が 2 以下になる確率を求めなさい。



解き方　目の出方は全部で $6\times6=36$ 通り。直線 OA の式は $y=\dfrac{1}{2}x$。

(1)　P が $y=\dfrac{1}{2}x$ 上にあればよい。$(2,\ 1), (4,\ 2), (6,\ 3)$ の3通り。$\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{12}$　　**答**　$\dfrac{1}{12}$

(2)　P を通り y 軸に平行な直線と OA の交点を H とすると、$\triangle OAP=\dfrac{1}{2}\times PH\times4=2PH$。面積3 → $PH=\dfrac{3}{2}$。

P は直線 OA に平行な2本の直線 $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{3}{2}$（図の点線）の上。$(1,\ 2), (3,\ 3), (5,\ 4), (5,\ 1)$ の4通り。$\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$　　**答**　$\dfrac{1}{9}$

(3)　面積2以下 → $PH=\dfrac{1}{2}$ または 1（$PH=0$ は一直線で三角形ができない）。

$y=\dfrac{1}{2}x\pm\dfrac{1}{2}$ 上：$(1,\ 1), (3,\ 2), (5,\ 3), (3,\ 1), (5,\ 2)$　$y=\dfrac{1}{2}x\pm1$ 上：$(2,\ 2), (4,\ 3), (6,\ 4), (4,\ 1), (6,\ 2)$

合わせて10通り。$\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$　　**答**　$\dfrac{5}{18}$

例題3　カード —— 同時に・戻さない・3枚

箱の中に $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ の数字が1つずつ書かれた7枚のカードが入っている。どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。

(1)　同時に2枚取り出すとき、2枚の数の積が偶数になる確率を求めなさい。

(2)　1枚ずつ続けて2枚取り出し（取り出したカードは戻さない）、1枚目の数を a、2枚目の数を b とする。b が a の倍数になる確率を求めなさい。

(3)　同時に3枚取り出すとき、3枚の数の和が偶数になる確率を求めなさい。

解き方　(1)　取り出し方は $7\times6\div2=21$ 通り。積が奇数になるのは2枚とも奇数（$1, 3, 5, 7$ から2枚）のときで $4\times3\div2=6$ 通り。**余事象**を使って $1-\dfrac{6}{21}=\dfrac{15}{21}=\dfrac{5}{7}$　　**答**　$\dfrac{5}{7}$

(2)　取り出し方は $7\times6=42$ 通り（順番を区別する）。$a=1$ のとき b は何でも倍数で6通り、$a=2$ のとき $b=4,\ 6$、$a=3$ のとき $b=6$、$a\geqq4$ のときはない。$6+2+1=9$ 通り。$\dfrac{9}{42}=\dfrac{3}{14}$　　**答**　$\dfrac{3}{14}$

(3)　取り出し方は $7\times6\times5\div6=35$ 通り。和が偶数になるのは「奇数2枚と偶数1枚」か「偶数3枚」。

奇数2枚の選び方 $4\times3\div2=6$、偶数1枚の選び方3で $6\times3=18$ 通り。偶数3枚は $\{2,\ 4,\ 6\}$ の1通り。$\dfrac{18+1}{35}=\dfrac{19}{35}$　　**答**　$\dfrac{19}{35}$

例題4　点の移動を3回 ――「組 × 並べ方」で数える

数直線上の点 P は、はじめ原点にある。1個のさいころを投げて、1 か 2 の目が出たら正の方向へ1だけ進み、3 か 4 の目が出たら負の方向へ1だけ進み、5 か 6 の目が出たら動かない。2回目からは、その前に止まった位置から動く。どの目が出ることも同様に確からしいものとする。

(1)　さいころを2回投げたとき、点 P が $+2$ の位置にある確率を求めなさい。

(2)　さいころを2回投げたとき、点 P が原点にある確率を求めなさい。

(3)　さいころを3回投げたとき、点 P が原点にある確率を求めなさい。

解き方　1回の動きは「$+1$（目は2通り）」「-1（2通り）」「0（2通り）」の3種類。

(1)　2回とも $+1$。$2\times2=4$ 通り。$\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$　　**答**　$\dfrac{1}{9}$

(2)　動きの順が $(+1,\ -1),(-1,\ +1),(0,\ 0)$ のとき。どれも $2\times2=4$ 通りで、$4\times3=12$ 通り。$\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$　　**答**　$\dfrac{1}{3}$

(3)　全部で216通り。3回の動きの合計が0になる**組**は $\{+1,\ -1,\ 0\}$ と $\{0,\ 0,\ 0\}$ の2つ。

$\{+1,\ -1,\ 0\}$：並べ方6通り × 目の出方 $2\times2\times2=8$ → 48通り　$\{0,\ 0,\ 0\}$：並べ方1通り × 8 → 8通り

$\dfrac{48+8}{216}=\dfrac{56}{216}=\dfrac{7}{27}$　　**答**　$\dfrac{7}{27}$

練習1　スピード練習　1問1分で

目標6分

どの場合も同様に確からしいものとする。

(1) 大小2つのさいころを同時に投げるとき、出た目の数の積が奇数になる確率を求めなさい。

答

(2) 大小2つのさいころを同時に投げるとき、出た目の数の差が3になる確率を求めなさい。

答

(3) 1個のさいころを3回投げるとき、少なくとも1回は6の目が出る確率を求めなさい。

答

(4) 1, 2, 3, 4, 5 の数字が1つずつ書かれた5枚のカードから同時に2枚取り出すとき、2枚とも奇数である確率を求めなさい。

答

(5) 3枚の硬貨を同時に投げるとき、表がちょうど2枚出る確率を求めなさい。

答

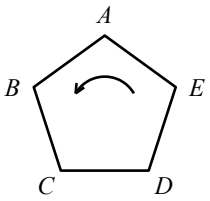
(6) 1 から 6 までの数字が1つずつ書かれた6枚のカードから、1枚ずつ続けて2枚取り出す（戻さない）。2枚の数の和が7になる確率を求めなさい。

答

練習2　入試の形で解こう（1）　正五角形の頂点

目標8分

(1) 右の図のように、正五角形 $ABCDE$ がある。大小2つのさいころを同時に投げ、大きいさいころの出た目を a、小さいさいころの出た目を b とする。頂点 A から反時計回りに頂点を a 個進んだ点を P、b 個進んだ点を Q とする。例えば、$a=2, b=6$ のとき、P は C、Q は B である。どの目が出ることも同様に確からしいものとする。
点 P と点 Q が同じ頂点になる確率を求めなさい。



答

(2) 3点 A, P, Q を結んで三角形ができる確率を求めなさい。

答

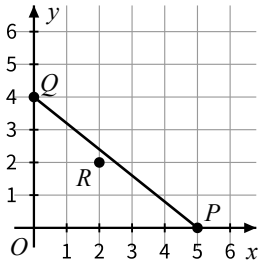
(3) 3点 A, P, Q を結んでできる三角形の内角のうち、1つの大きさが 108° になる確率を求めなさい。

答

練習3　入試の形で解こう（2）　座標平面の点と三角形

目標8分

(1) 大小2つのさいころを同時に投げ、大きいさいころの出た目を a、小さいさいころの出た目を b とする。右の図のように、x 軸上に点 $P(a,\ 0)$、y 軸上に点 $Q(0,\ b)$ をとり、点 $R(2,\ 2)$ を考える。原点を O とする（図は $a=5, b=4$ のとき）。どの目が出ることも同様に確からしいものとする。
$\triangle OPQ$ の面積が 6 になる確率を求めなさい。



答

(2) 直線 PQ が点 R を通る確率を求めなさい。

答

(3) 点 R が $\triangle OPQ$ の内部にある確率を求めなさい。ただし、三角形の周上は内部にふくめない。

答

練習4　入試の形で解こう（3）　カードを戻して3回

目標8分

箱の中に 1, 2, 3, 4 の数字が1つずつ書かれた4枚のカードが入っている。この箱からカードを1枚取り出して数字を記録し、箱に戻す。これを3回くり返し、記録した数を順に a, b, c とする。どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。

(1) a, b, c がすべて異なる確率を求めなさい。

答

(2) $a \times b \times c$ が4の倍数になる確率を求めなさい。

答

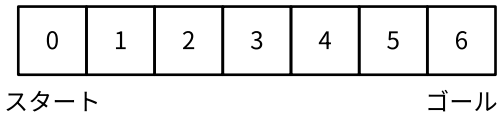
(3) a, b, c を3辺とする三角形ができる確率を求めなさい。

答

練習5　入試の形で解こう（4）　すごろく（ゴールで折り返す）

目標8分

下の図のように、0 から 6 までのマスがあるすごろくがある。コマは 0 のマス（スタート）から出発し、1個のさいころを投げて出た目の数だけ右へ進む。6 のマス（ゴール）をこえるときは、ゴールで折り返して、こえた分だけ左へもどる。例えば、4 のマスで5の目が出ると、ゴールまで2進み、残りの3だけもどって 3 のマスに止まる。ちょうどゴールに止まったら、そこで終わる（あとに投げたさいころの目は考えない）。どの目が出ることも同様に確からしいものとする。



(1) さいころを2回投げたとき、2回目にちょうどゴールに止まる確率を求めなさい。

答

(2) さいころを2回投げたとき、コマが 4 のマスに止まっている確率を求めなさい。

答

(3) さいころを3回投げたとき、3回目にはじめてゴールに止まる確率を求めなさい。

答

どの場合も同様に確からしいものとする。

(1) 大小2つのさいころを同時に投げるとき、出た目の数の和が9以上になる確率を求めなさい。 **[25点]**

答

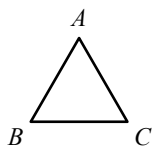
(2) 大小2つのさいころを同時に投げ、大きいさいころの出た目を a、小さいさいころの出た目を b とする。点 $(a,\ b)$ が関数 $y=\dfrac{6}{x}$ のグラフ上にある確率を求めなさい。 **[25点]**

答

(3) 1, 2, 3, 4, 5 の数字が1つずつ書かれた5枚のカードから同時に3枚取り出すとき、3枚の数の和が偶数になる確率を求めなさい。 **[25点]**

答

(4) 右の図のように、正三角形 ABC がある。点 P ははじめ頂点 A にあり、1個のさいころを投げて出た目の数だけ、頂点を $A \to B \to C \to A \to \cdots$ の順に移動する。2回目は、1回目に止まった頂点から移動する。さいころを2回投げたとき、点 P が頂点 A に止まる確率を求めなさい。 **[25点]**



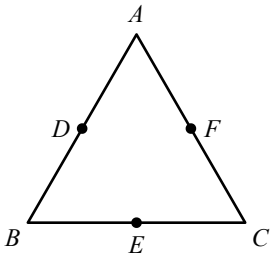
答

入試にチャレンジ1　正三角形の頂点と辺の中点 —— 一直線と直角を見ぬく

発展

(1) 右の図のように、正三角形 ABC と、辺 AB の中点 D、辺 BC の中点 E、辺 CA の中点 F がある。この6つの点を $A \to D \to B \to E \to C \to F \to A$ の順にならべる。大小2つのさいころを同時に投げ、大きいさいころの出た目を a、小さいさいころの出た目を b とする。点 A から出発してこの順に a 個進んだ点を P、b 個進んだ点を Q とする（6個進むと A にもどる）。どの目が出ることも同様に確からしいものとする。

3点 A, P, Q を結んで三角形ができる確率を求めなさい。



答

(2) 3点 A, P, Q を結んでできる三角形が正三角形になる確率を求めなさい。

答

(3) 3点 A, P, Q を結んでできる三角形が直角三角形になる確率を求めなさい。

答

解答（答えと短い解き方）

第3講　確率

練習1　スピード練習　1問1分で

(1)　$\dfrac{1}{4}$

2つとも奇数の目（$1,3,5$）のとき。$3\times3=9$ 通り。$\dfrac{9}{36}=\dfrac{1}{4}$

(2)　$\dfrac{1}{6}$

(大, 小) $=(1,\,4),(2,\,5),(3,\,6),(4,\,1),(5,\,2),(6,\,3)$ の6通り。$\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

(3)　$\dfrac{91}{216}$

3回とも6以外の目は $5\times5\times5=125$ 通り。$1-\dfrac{125}{216}=\dfrac{91}{216}$

(4)　$\dfrac{3}{10}$

取り出し方は $5\times4\div2=10$ 通り。2枚とも奇数は $\{1,\,3\},\{1,\,5\},\{3,\,5\}$ の3通り。$\dfrac{3}{10}$

(5)　$\dfrac{3}{8}$

表裏の出方は $2\times2\times2=8$ 通り。表が2枚は（表表裏）（表裏表）（裏表表）の3通り。$\dfrac{3}{8}$

(6)　$\dfrac{1}{5}$

取り出し方は $6\times5=30$ 通り。和が7は $(1,\,6),(2,\,5),(3,\,4)$ とその逆で6通り。$\dfrac{6}{30}=\dfrac{1}{5}$

練習2　入試の形で解こう（1）　正五角形の頂点

(1)　$\dfrac{2}{9}$

5進むと A にもどるので、B は1と6の目。同じ頂点は $a=b$ の6通りと $(1,\,6),(6,\,1)$ で8通り。

(2)　$\dfrac{1}{2}$

a,b が5以外で25通り。そのうち $P=Q$ になる7通りを除いて18通り。$\dfrac{18}{36}$

(3)　$\dfrac{5}{18}$

108° の角は、となり合う2辺をもつ三角形。$\{B,\,C\}$ 4通り、$\{B,\,E\}$ 4通り、$\{D,\,E\}$ 2通り。

練習3　入試の形で解こう（2）　座標平面の点と三角形

(1)　$\dfrac{1}{9}$

$\dfrac{1}{2}ab=6$ より $ab=12$。$(2,\,6),(3,\,4),(4,\,3),(6,\,2)$ の4通り。

(2)　$\dfrac{1}{12}$

直線 PQ の $x=2$ のときの y は $\dfrac{b(a-2)}{a}$。これが2になるのは $(3,\,6),(4,\,4),(6,\,3)$。

(3)　$\dfrac{2}{9}$

$a>2$ で $\dfrac{b(a-2)}{a}>2$ のとき。$a=4$：2通り、$a=5$：3通り、$a=6$：3通りで8通り。

練習4　入試の形で解こう（3）　カードを戻して3回

(1)　$\dfrac{3}{8}$

取り出し方は全部で $4\times4\times4=64$ 通り。すべて異なるのは $4\times3\times2=24$ 通り。$\dfrac{24}{64}=\dfrac{3}{8}$

(2)　$\dfrac{11}{16}$

4の倍数にならないのは、3つとも奇数（8通り）と、2が1つで残りが奇数（12通り）。$64-20=44$

(3) $\dfrac{17}{32}$

いちばん長い辺＜他の2辺の和。組で調べて並べ方をかける。$4+24+6=34$（通り）。$\dfrac{34}{64}$

練習5　入試の形で解こう（4）　すごろく（ゴールで折り返す）

(1) $\dfrac{5}{36}$

1回目は6以外で、2回目に $6-a$ が出ればよい。5通り。$\dfrac{5}{36}$

(2) $\dfrac{7}{36}$

折り返さず $a+b=4$ が3通り、折り返して $a+b=8$（$a\neq 6$）が4通り。$\dfrac{7}{36}$

(3) $\dfrac{25}{216}$

どのマスからも、ゴールに止まる目は1つだけ。$5\times 5\times 1=25$（通り）。$\dfrac{25}{216}$

確認テスト　10分で解こう

(1) $\dfrac{5}{18}$

和が 9, 10, 11, 12 になるのは $4+3+2+1=10$（通り）。$\dfrac{10}{36}$

(2) $\dfrac{1}{9}$

$ab=6$ になればよい。$(1,\ 6),(2,\ 3),(3,\ 2),(6,\ 1)$ の4通り。$\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

(3) $\dfrac{3}{5}$

取り出し方は10通り。和が偶数は「奇数2枚と偶数1枚」で $3\times 2=6$（通り）。

(4) $\dfrac{1}{3}$

和が3の倍数（3, 6, 9, 12）になればよい。$2+5+4+1=12$（通り）。$\dfrac{12}{36}$

入試にチャレンジ1　正三角形の頂点と辺の中点 —— 一直線と直角を見ぬく

(1) $\dfrac{4}{9}$

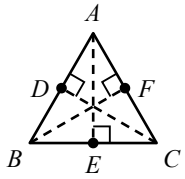
P, Q が A でなく $P\neq Q$ で20通り。一直線になる $\{D,\ B\},\{F,\ C\}$ の4通りを除く。$\dfrac{16}{36}$

(2) $\dfrac{1}{9}$

正三角形は $\triangle ABC$ と $\triangle ADF$。$\{B,\ C\},\{D,\ F\}$ が各2通りで4通り。

(3) $\dfrac{2}{9}$

頂点と向かい合う辺の中点を結ぶ線分は垂直。直角三角形は4つで、各2通りの8通り。$\dfrac{8}{36}$



くわしい解き方は創心館出版の攻略テキスト（別冊解答）に載っています。