第3講　2次方程式の文章題・動点

道幅・箱・線分上の点 → 2点が動く → 辺ごとに場合分け（何秒後と何秒後）・解の吟味 → 食塩水・割合

要点の確認	例題	練習（入試の形）	確認テスト
10分	20分	35分	10分

要点　2次方程式の文章題・動点で使う6つの道具

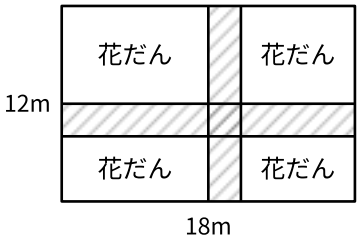
- **① 2次方程式の立て方**　求めるもの（長さ・時間）を x とおく → 図の長さを x の式で**書きこむ** → 面積・体積の式 ＝ 数 → 整理して $x^2+\cdots=0$ にし、因数分解する（できなければ解の公式）。
- **② 解の吟味**　出た解が問題に合うかを調べる。長さは正の数。道幅・余白・切り取る長さは辺より短い（四すみを切る箱なら**短い辺の半分より小さい**）。時間は点が**止まるまでの範囲**。合わない解は「問題に合わない」として除く。
- **③ 道幅・額縁**　道は**端に寄せても**残りの面積は同じ → $(a-x)(b-x)$。内側に幅 x の余白をとると縦も横も $2x$ 短くなり、外側に幅 x の額縁をつけると $2x$ 長くなる。
- **④ 四すみを切った箱**　1辺 x の正方形を切り取ると、底面は $(a-2x)(b-2x)$、高さは x。容積 ＝ 底面積 $\times x$。
- **⑤ 動点**　進んだ長さ ＝ 速さ $\times$ 時間。**角に着く時間**を先に書き出し、辺ごとに長さ・面積を x の式にする。面積が直接求めにくいときは、**全体から周りの三角形を引く**。
- **⑥ 食塩水・割合**　食塩の量 ＝ 食塩水の量 $\times\dfrac{\text{濃度}}{100}$。水を加えても蒸発させても**食塩の量は変わらない**。a%増 → $\times\left(1+\dfrac{a}{100}\right)$、$a$%引き → $\times\left(1-\dfrac{a}{100}\right)$。

例題1　道幅 —— 道を端に寄せて式を立てる

右の図のように、縦 12 m、横 18 m の長方形の土地に、縦と横に同じ幅の道を1本ずつつくり、残りを花だんにする。道は土地の辺に平行である。

(1)　道幅を 2 m にするとき、花だんの面積を求めなさい。

(2)　花だんの面積を 135 m² にするとき、道幅を求めなさい。



解き方　(1)　道を端に寄せると、花だんは縦 $12-2=10$（m）、横 $18-2=16$（m）の長方形になる。 $10\times16=160$　　**答　160 m²**

(2)　道幅を x m とすると、花だんは縦 $(12-x)$ m、横 $(18-x)$ m の長方形と同じ面積になる。

$(12-x)(18-x)=135$ → $216-30x+x^2=135$ → $x^2-30x+81=0$ → $(x-3)(x-27)=0$ → $x=3,\ 27$

道幅は土地の縦 12 m より短いので $0<x<12$。$x=27$ は問題に合わない。　　**答　3 m**

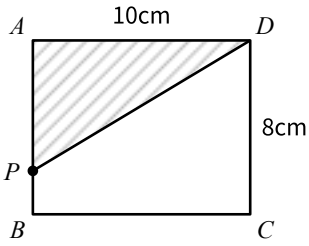
※ 解が2つ出たら、**範囲に入るか**を必ず確かめる。問題に合わない解まで書くと誤りになる。

例題2　動点 ―― 角に着く時間で場合分け →「何秒後と何秒後」

右の図のような、$AB = 8$ cm、$AD = 10$ cm の長方形 $ABCD$ がある。点 P は A を出発し、毎秒 1 cm の速さで辺 AB、BC、CD 上を B、C を通って D まで動き、D で止まる。

(1)　出発してから6秒後の $\triangle APD$ の面積を求めなさい。

(2)　$\triangle APD$ の面積が 25 cm² になるのは、出発してから何秒後と何秒後か。



解き方　P が B に着くのは8秒後、C に着くのは $8 + 10 = 18$（秒後）、D に着くのは $18 + 8 = 26$（秒後）。

(1)　6秒後は辺 AB 上で $AP = 6$。$\triangle APD = \dfrac{1}{2} \times AD \times AP = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30$　　**答　30 cm²**

(2)　x 秒後の面積を、P のいる辺ごとに考える。

【$0 \leqq x \leqq 8$（辺 AB 上）】$AP = x$ で、面積は $\dfrac{1}{2} \times 10 \times x = 5x$。$5x = 25$ より $x = 5$（範囲に入る）

【$8 \leqq x \leqq 18$（辺 BC 上）】底辺 $AD = 10$、高さ $AB = 8$ で一定。面積はずっと40で、25にはならない。

【$18 \leqq x \leqq 26$（辺 CD 上）】$PD = 26 - x$ で、面積は $\dfrac{1}{2} \times 10 \times (26 - x) = 5(26 - x)$。$5(26 - x) = 25$ より $x = 21$（範囲に入る）

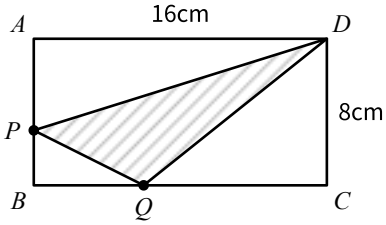
答　5秒後と21秒後

例題3　2点が動く ―― 全体から引く → 2次方程式 → 解の吟味

右の図のような、$AB = 8$ cm、$BC = 16$ cm の長方形 $ABCD$ がある。点 P は B を出発し、辺 BA 上を毎秒 1 cm の速さで A まで動く。点 Q は P と同時に B を出発し、辺 BC 上を毎秒 2 cm の速さで C まで動く。P が A に、Q が C に同時に着き、そこで2点とも止まる。

(1)　出発してから3秒後の $\triangle DPQ$ の面積を求めなさい。

(2)　$\triangle DPQ$ の面積が 55 cm² になるのは、出発してから何秒後か。



解き方　$\triangle DPQ$ は直接求めにくいので、**長方形から周りの3つの直角三角形を引く**。x 秒後（$0 \leqq x \leqq 8$）は

$BP = x$、$AP = 8 - x$、$BQ = 2x$、$QC = 16 - 2x$。

$\triangle DAP = \dfrac{1}{2} \times 16 \times (8 - x) = 64 - 8x$、$\triangle PBQ = \dfrac{1}{2} \times x \times 2x = x^2$、$\triangle QCD = \dfrac{1}{2} \times (16 - 2x) \times 8 = 64 - 8x$

$\triangle DPQ = 128 - (64 - 8x) - x^2 - (64 - 8x) = 16x - x^2$

(1)　$x = 3$ を代入して $16 \times 3 - 3^2 = 39$　　**答　39 cm²**

(2)　$16x - x^2 = 55$　→　$x^2 - 16x + 55 = 0$　→　$(x - 5)(x - 11) = 0$　→　$x = 5,\ 11$

2点は8秒後に止まるので $0 \leqq x \leqq 8$。$x = 11$ は問題に合わない。　　**答　5秒後**

動点の問題は、この順で解く

① 点が**角に着く時間**（止まる時間）を書き出す。例題2なら8秒後に B、18秒後に C、26秒後に D。

② 点のいる辺ごとに図をかき、長さを x の式で書きこむ（$AP = x$、$PD = 26 - x$ など）。

③ 面積を x の式にして方程式を解く。直接求めにくい三角形は、全体から周りの三角形を引く（例題3）。

④ 解が**その辺の範囲に入るか**を確かめる。「何秒後と何秒後」と聞かれたら、ほかの辺でも答えがないかを調べる。

例題4　食塩水 ――「食塩の量」で式を作る

(1)　8%の食塩水 300 g に水を加えて、5%の食塩水にしたい。水を何 g 加えればよいか。

(2)　3%の食塩水と8%の食塩水を混ぜて、6%の食塩水を 500 g 作りたい。それぞれ何 g ずつ混ぜればよいか。

解き方　(1)　食塩は $300 \times \dfrac{8}{100} = 24$（g）で、水を加えても変わらない。加える水を x g とすると

$(300 + x) \times \dfrac{5}{100} = 24 \quad \rightarrow \quad 300 + x = 480 \quad \rightarrow \quad x = 180$　　**答　180 g**

(2)　3%の食塩水を x g、8%の食塩水を y g とすると　$x + y = 500$ …①

食塩の量：$\dfrac{3}{100}x + \dfrac{8}{100}y = 500 \times \dfrac{6}{100}$　両辺を100倍して $3x + 8y = 3000$ …②

②−①×3 より $5y = 1500$、$y = 300$。①に代入して $x = 200$。　　**答　3%を 200 g、8%を 300 g**

※ 濃度（%）どうしをたしたりひいたりしない。いつも「食塩の量」と「食塩水の量」で式を作る。

練習1　スピード練習　式を立てて1問1分で

目標4分

(1) 縦が横より 4 cm 長い長方形があり、面積は 60 cm² である。横の長さを求めなさい。

答

(2) 7%の食塩水 400 g から水を蒸発させて、10%の食塩水にしたい。水を何 g 蒸発させればよいか。

答

(3) 1辺が x cm の正方形の、縦を 3 cm 長くし、横を 2 cm 短くした長方形の面積は 36 cm² になった。x の値を求めなさい。

答

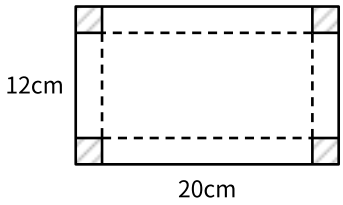
(4) 長さ 40 cm のひもで長方形を作ったところ、面積が 96 cm² になった。この長方形の2辺の長さを求めなさい。

答

練習2　入試の形で解こう（1）四すみを切った箱

目標5分

(1) 右の図のように、縦 12 cm、横 20 cm の長方形の紙の四すみから、同じ大きさの正方形を切り取り、点線で折り曲げて、ふたのない直方体の容器を作る。
切り取る正方形の1辺を 2 cm にするとき、容器の容積を求めなさい。



答

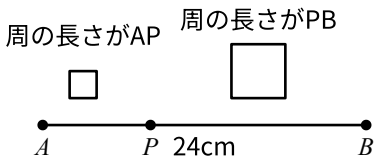
(2) 容器の底面積が 84 cm^2 になるとき、容器の高さを求めなさい。

答

練習3　入試の形で解こう（2）線分上の点と2つの正方形

目標5分

(1) 長さ 24 cm の線分 AB がある。点 P は A を出発し、線分 AB 上を毎秒 2 cm の速さで B まで動き、B で止まる。右の図のように、AP の長さを周の長さとする正方形と、PB の長さを周の長さとする正方形を作る。
点 P が A を出発してから4秒後の、2つの正方形の面積の和を求めなさい。



答

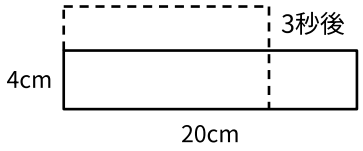
(2) 2つの正方形の面積の和が 26 cm^2 になるのは、点 P が A を出発してから何秒後と何秒後か。

答

練習4　入試の形で解こう（3）形が変わる長方形

目標4分

(1) 右の図のように、縦 4 cm、横 20 cm の長方形がある。この長方形の縦を毎秒 1 cm ずつ長くし、同時に横を毎秒 2 cm ずつ短くしていく。横の長さが 0 cm になったところで終わる。
3秒後の長方形の面積を求めなさい。



答

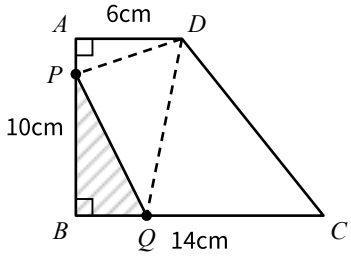
(2) 長方形の面積が 96 cm^2 になるのは、何秒後と何秒後か。

答

練習5　入試の形で解こう（4）台形の中の2つの動点

目標6分

(1) 右の図のような、$AD \parallel BC$、$\angle A = \angle B = 90^\circ$、$AD = 6$ cm、$AB = 10$ cm、$BC = 14$ cm の台形 $ABCD$ がある。点 P は A を出発し、辺 AB 上を毎秒 1 cm の速さで B に向かって動く。点 Q は P と同時に B を出発し、辺 BC 上を毎秒 2 cm の速さで C に向かって動く。Q が C に着いたとき、2点とも止まる。
出発してから3秒後の $\triangle PBQ$ の面積を求めなさい。



答

(2) $\triangle PBQ$ の面積が 24 cm^2 になるのは、出発してから何秒後と何秒後か。

答

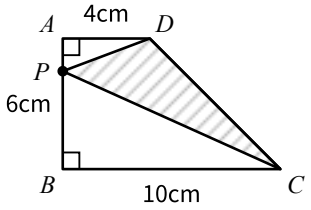
(3) $\triangle DPQ$ の面積が 28 cm^2 になるのは、出発してから何秒後と何秒後か。

答

練習6　入試の形で解こう（5）辺ごとに場合分けする動点

目標7分

(1) 右の図のような、$AD \parallel BC$、$\angle A = \angle B = 90^\circ$、$AD = 4$ cm、$AB = 6$ cm、$BC = 10$ cm の台形 $ABCD$ がある。点 P は A を出発し、毎秒 1 cm の速さで辺 AB、BC 上を B を通って C まで動き、C で止まる。
出発してから10秒後の $\triangle PCD$ の面積を求めなさい。



答

(2) $\triangle PCD$ の面積が 24 cm^2 になるのは、出発してから何秒後と何秒後か。

答

(3) $\triangle PCD$ の面積が 21 cm^2 以上になっているのは、何秒間か。

答

練習7　入試の形で解こう　割合の文章題

目標4分

(1) ある品物を定価の15%引きで買ったところ、代金は1530円だった。この品物の定価を求めなさい。

答

(2) ある中学校の昨年の生徒数は500人だった。今年は昨年と比べて、男子が10%増え、女子が5%減ったので、全体では8人増えた。今年の男子の生徒数を求めなさい。

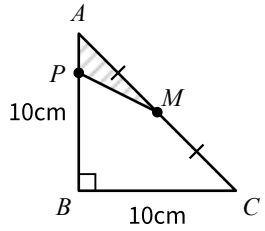
答

確認テスト **10分で解こう**　　点数　　／100点

(1) 4%の食塩水 200 g と9%の食塩水 300 g を混ぜると、何%の食塩水になるか。 **［25点］**

答

(2) 右の図のような、$AB = BC = 10$ cm、$\angle B = 90^\circ$ の直角二等辺三角形 ABC があり、点 M は辺 AC の中点である。点 P は A を出発し、毎秒 1 cm の速さで辺 AB、BC 上を B を通って C まで動き、C で止まる。
出発してから4秒後の $\triangle APM$ の面積を求めなさい。 **［25点］**



答

(3) (2)の $\triangle APM$ の面積が 15 cm^2 になるのは、出発してから何秒後と何秒後か。 **［25点］**

答

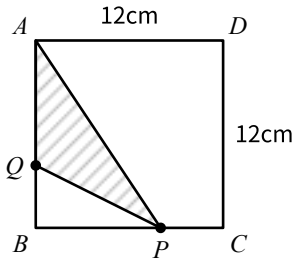
(4) 縦 20 cm、横 30 cm の長方形の絵のまわりに、同じ幅の額縁をつける。額縁の部分の面積が絵の面積と等しくなるとき、額縁の幅を求めなさい。 **［25点］**

答

入試にチャレンジ1　式が辺ごとに変わる動点・割合の2次方程式

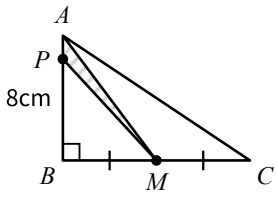
発展

(1) 右の図のような、1辺 12 cm の正方形 $ABCD$ がある。点 P は B を出発し、毎秒 2 cm の速さで辺 BC、CD 上を C を通って D まで動く。点 Q は P と同時に B を出発し、辺 BA 上を毎秒 1 cm の速さで A まで動く。P が D に、Q が A に同時に着き、そこで2点とも止まる。
$\triangle APQ$ の面積が 27 cm^2 になるのは、出発してから何秒後と何秒後か。



答

(2) 右の図のような、$AB = 8$ cm、$BC = 12$ cm、$\angle B = 90^\circ$ の直角三角形 ABC があり、点 M は辺 BC の中点である。点 P は A を出発し、毎秒 1 cm の速さで辺 AB、BC 上を B を通って C まで動き、C で止まる。
$\triangle APM$ の面積が 12 cm^2 になるのは、出発してから何秒後か。すべて求めなさい。



答

(3) ある品物の定価を x%値上げしたが、売れなかったので、値上げ後の値段から $2x$%値下げした。その結果、はじめの定価より28%安くなった。x の値を求めなさい。

答

解答（答えと短い解き方）

第3講　2次方程式の文章題・動点

練習1　スピード練習　式を立てて1問1分で

(1)　6 cm

$x(x+4)=60$ より $(x+10)(x-6)=0$。$x>0$ なので $x=6$

(2)　120 g

食塩28 g は変わらない。10%の食塩水は $28\div\dfrac{10}{100}=280$（g）。$400-280$

(3)　$x=6$

$(x+3)(x-2)=36$ より $(x+7)(x-6)=0$。$x>2$ なので $x=6$

(4)　8 cm と 12 cm

縦を x cm とすると横は $(20-x)$ cm。$x(20-x)=96$ より $(x-8)(x-12)=0$

練習2　入試の形で解こう（1）四すみを切った箱

(1)　256 cm^3

底面は縦 $12-2\times2=8$（cm）、横 $20-2\times2=16$（cm）、高さは 2 cm。$8\times16\times2=256$

(2)　3 cm

$(12-2x)(20-2x)=84$ より $(x-3)(x-13)=0$。$0<x<6$ なので $x=3$

練習3　入試の形で解こう（2）線分上の点と2つの正方形

(1)　20 cm^2

4秒後は $AP=8$、$PB=16$。正方形の1辺はそれぞれ $8\div4=2$、$16\div4=4$。$2^2+4^2=4+16=20$

(2)　2秒後と10秒後

正方形の1辺は $\dfrac{x}{2}$、$\dfrac{12-x}{2}$。2乗の和＝26 から $(x-2)(x-10)=0$、$0\leqq x\leqq12$

練習4　入試の形で解こう（3）形が変わる長方形

(1)　98 cm^2

3秒後は縦 $4+3=7$（cm）、横 $20-2\times3=14$（cm）。$7\times14=98$

(2)　2秒後と4秒後

$(4+x)(20-2x)=96$ より $(x-2)(x-4)=0$。$0\leqq x\leqq10$ でどちらも合う。

練習5　入試の形で解こう（4）台形の中の2つの動点

(1)　21 cm^2

3秒後は $AP=3$ で $PB=10-3=7$、$BQ=2\times3=6$。$\dfrac{1}{2}\times7\times6=21$

(2)　4秒後と6秒後

$0\leqq x\leqq7$。$\dfrac{1}{2}(10-x)\times2x=24$ より $(x-4)(x-6)=0$

(3)　1秒後と2秒後

台形100から3つの三角形を引いて $\triangle DPQ=x^2-3x+30=28$、$(x-1)(x-2)=0$

練習6　入試の形で解こう（5）辺ごとに場合分けする動点

(1)　18 cm^2

P は6秒後に B。10秒後は $BP=4$、$PC=6$、高さ $AB=6$。$\dfrac{1}{2}\times6\times6$

(2)　4秒後と8秒後

辺 AB 上は $3x+12=24$ で $x=4$、辺 BC 上は $3(16-x)=24$ で $x=8$。

(3)　6秒間

$3x+12=21$ より $x=3$、$3(16-x)=21$ より $x=9$。$9-3=6$（秒間）

練習7　入試の形で解こう　割合の文章題

(1)　1800円

$x \times \left(1 - \dfrac{15}{100}\right) = 1530$ を解く。

(2)　242人

昨年の男子 x、女子 y で $x + y = 500$、$2x - y = 160$ より $x = 220$。今年は $220 \times \dfrac{110}{100}$

確認テスト　10分で解こう

(1)　7%

食塩は $200 \times \dfrac{4}{100} + 300 \times \dfrac{9}{100} = 8 + 27 = 35$（g）、食塩水は 500 g。$\dfrac{35}{500} \times 100 = 7$

(2)　10 cm²

4秒後は $AP = 4$。AP を底辺とみると、高さは M から辺 AB までの距離で $\dfrac{1}{2}BC = 5$。$\dfrac{1}{2} \times 4 \times 5 = 10$

(3)　6秒後と14秒後

$\triangle APM = \dfrac{1}{2}\triangle APC$。$AB$ 上は $\dfrac{5}{2}x = 15$、BC 上は $\dfrac{5}{2}(20 - x) = 15$。

(4)　5 cm

$(20 + 2x)(30 + 2x) = 1200$ より $(x + 30)(x - 5) = 0$。$x > 0$ なので $x = 5$

入試にチャレンジ1　式が辺ごとに変わる動点・割合の2次方程式

(1)　3秒後と $\dfrac{15}{2}$ 秒後

AQ が底辺。BC 上は $x(12 - x) = 27$ で $x = 3$（9は不適）、CD 上は $6(12 - x) = 27$。

(2)　4秒後、11秒後、17秒後

AB 上 $3x = 12$、BM 間 $4(14 - x) = 12$、MC 間 $4(x - 14) = 12$。BC 上で2回ある。

(3)　$x = 20$

$\left(1 + \dfrac{x}{100}\right)\left(1 - \dfrac{2x}{100}\right) = \dfrac{72}{100}$ より $(x + 70)(x - 20) = 0$、$x > 0$

くわしい解き方は創心館出版の攻略テキスト（別冊解答）に載っています。