第3講　関数　放物線と直線・図形の面積、「求め方」を書く

座標を文字で → 長さ・面積を式で → 方程式 → 解の吟味／等積変形・面積の二等分・反比例と面積

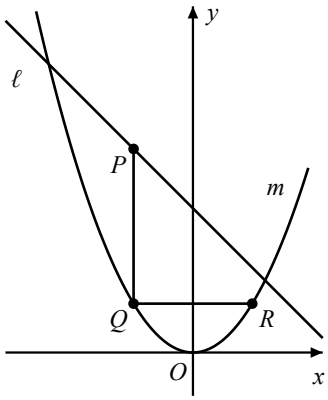
要点の確認	例題	練習（入試の形）	確認テスト
10分	20分	35分	10分

要点　「求め方」は4つの手順で書く

- **① 点の座標を文字で表す**　「P は ℓ 上の点だから　$P(t,\ -t+4)$」のように、**どのグラフ上の点か**を書いてから座標を書く。$y=ax^2$ 上で x 座標が p の点は $(p,\ ap^2)$、$y=\dfrac{b}{x}$ 上なら $\left(p,\ \dfrac{b}{p}\right)$。
- **② 長さを式で表す**　y 軸に平行な線分＝（上の点の y 座標）$-$（下の点の y 座標）。x 軸に平行な線分＝（右の点の x 座標）$-$（左の点の x 座標）。$y=ax^2$ 上で高さが同じ2点は y 軸について対称。$t<0$ **の点と** y **軸との距離は** $-t$。
- **③ 条件を言葉で書いてから方程式**　「線分 PQ の長さが線分 QR の長さより 1 cm 長いから」と書き、そのまま式にする。
- **④ 解いて確かめる（解の吟味）**　「$-4<t<0$ だから」と範囲を書いてから答えを1つにしぼる。$\sqrt{\ }$ をふくむ答えは $\sqrt{7}\fallingdotseq 2.65$ のように**およその値で範囲に入るか**確かめる。

例題1　長さの条件から t を求める ―― 模範の「求め方」

右の図において、m は関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフを表し、ℓ は関数 $y=-x+4$ のグラフを表す。P は ℓ 上の点であり、その x 座標は負である。P の x 座標を t とし、$-4<t<0$ とする。Q は、P を通り y 軸に平行な直線と m との交点である。R は、Q を通り x 軸に平行な直線と m との交点のうち、Q と異なる点である。線分 PQ の長さが線分 QR の長さより 1 cm 長いときの t の値を求めなさい。答えを求める過程がわかるように、途中の式を含めた求め方も説明すること。ただし、原点Oから点(1，0)までの距離、原点Oから点(0，1)までの距離はそれぞれ1 cmであるとする。



解き方　〔求め方〕　P は ℓ 上の点だから　$P(t,\ -t+4)$

Q は m 上の点で、x 座標は t だから　$Q\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$

$-4<t<0$ のとき P は Q より上にあるから　$PQ=(-t+4)-\dfrac{1}{2}t^2=-\dfrac{1}{2}t^2-t+4$（cm）

R は Q と y 軸について対称な点だから　$R\left(-t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$　　よって　$QR=-t-t=-2t$（cm）

線分 PQ の長さが線分 QR の長さより 1 cm 長いから　$-\dfrac{1}{2}t^2-t+4=-2t+1$

整理すると　$t^2-2t-6=0$　　これを解くと　$t=1\pm\sqrt{7}$

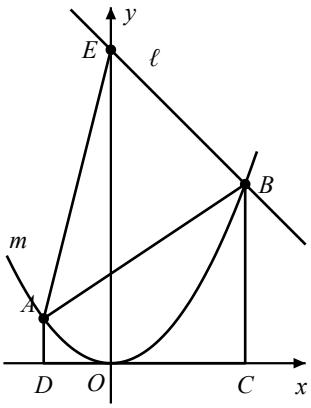
$-4<t<0$ だから　$t=1-\sqrt{7}$　（$1-\sqrt{7}\fallingdotseq -1.65$ で範囲に入る。$1+\sqrt{7}$ は正なので合わない）　　**答**　$t=1-\sqrt{7}$

要点　面積を文字の式で表す4つの方法

- **⑤ 三角形を y 軸で分ける**　$\triangle OAB$ は、直線 AB と y 軸の交点 F で分けて　$\dfrac{1}{2}\times OF\times$（$B$ の x 座標 $-$ A の x 座標）。y 軸上の点が O でなく E のときも、EF を底辺にして同じように求める。
- **⑥ たての線分で分ける**　$\triangle PAB$ で、P を通り y 軸に平行な直線と AB との交点を Q とすると　$\dfrac{1}{2}\times PQ\times$（$A$ と B の x 座標の差）
- **⑦ 台形・平行四辺形**　たての2辺が平行なら、上底・下底は y 座標の差、高さは x 座標の差。平行四辺形は（底辺）×（高さ）、または対角線で分けた三角形の2倍。
- **⑧ 直線の式を速く**　$y=ax^2$ 上の、x 座標が p, q の2点を通る直線は　**傾き** $a(p+q)$**、切片** $-apq$。a が文字のままでも使える。

例題2　面積の条件から a を求める ―― 台形と三角形

右の図において、m は関数 $y=ax^2$（a は正の定数）のグラフを表す。A, B は m 上の点であり、A の x 座標は -2、B の x 座標は4である。C は、B を通り y 軸に平行な直線と x 軸との交点であり、D は、A を通り y 軸に平行な直線と x 軸との交点である。ℓ は、B を通り傾きが -1 の直線であり、E は ℓ と y 軸との交点である。四角形 $ABCD$ の面積と $\triangle EAB$ の面積が等しいときの a の値を求めなさい。答えを求める過程がわかるように、途中の式を含めた求め方も説明すること。ただし、原点Oから点(1，0)までの距離、原点Oから点(0，1)までの距離はそれぞれ1 cmであるとする。



解き方　〔求め方〕　A, B は m 上の点だから　$A(-2,\ 4a)$、$B(4,\ 16a)$

$C(4,\ 0)$、$D(-2,\ 0)$ だから　$AD=4a$（cm）、$BC=16a$（cm）、$DC=4-(-2)=6$（cm）

$AD \parallel BC$ だから、四角形 $ABCD$ は台形で、その面積は　$\dfrac{1}{2}\times(4a+16a)\times 6=60a$（cm²）　…㋐

直線 AB の傾きは $\dfrac{16a-4a}{4-(-2)}=2a$。$y=2ax+b$ に $A(-2,\ 4a)$ を代入して $b=8a$。AB と y 軸との交点を F とすると $F(0,\ 8a)$

ℓ の式を $y=-x+c$ とすると、B を通るから $16a=-4+c$、$c=16a+4$。よって　$E(0,\ 16a+4)$、$EF=(16a+4)-8a=8a+4$（cm）

$\triangle EAB=\triangle EAF+\triangle EBF=\dfrac{1}{2}\times(8a+4)\times 2+\dfrac{1}{2}\times(8a+4)\times 4=24a+12$（cm²）　…㋑

四角形 $ABCD$ の面積と $\triangle EAB$ の面積は等しいから　$60a=24a+12$　　これを解くと　$a=\dfrac{1}{3}$　　**答**　$a=\dfrac{1}{3}$

部分点のつくところ（8点の問題。白紙にしないことがいちばん大事）

・点の座標を文字（a や t）で正しく表している。　・長さや面積を文字の式で表している（例題2の㋐・㋑）。　・条件から正しい方程式を立てている。

・答えだけでは満点にならない。「〜は○○上の点だから」「よって」「〜だから」でつなぎ、**読む人がたどれる順に**書く。問題文にない点（例題2の F）を使うときは「〜を F とすると」と書いてから使う。

要点　等積変形と面積の二等分（全国の入試でよく出る形）

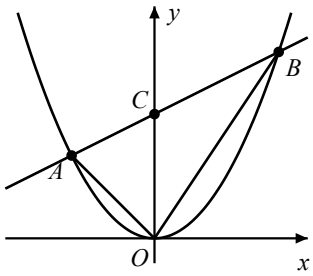
- **⑨ 等積変形**　底辺 AB が共通で、P, Q が AB について同じ側にあるとき
  $\triangle PAB = \triangle QAB \iff PQ \parallel AB$。→ O を通り AB に平行な直線をひいて、グラフとの交点を求める。
- **⑩ 反対側の点**　AB と y 軸の交点を C とする。y 軸上で、C をはさんで O と反対側に CO と同じ長さだけ進んだ点を通り、AB に平行な直線をひく。
- **⑪ 三角形の二等分**　頂点を通る直線で二等分 → 向かいの辺の**中点**を通る。中点の座標は、2点の x 座標・y 座標をそれぞれたして2でわる。
- **⑫ 平行四辺形の二等分**　**対角線の交点**（対角線の中点）を通る直線は、どれも平行四辺形の面積を二等分する。

例題3　等積変形 —— AB に平行な直線をひく

右の図のように、関数 $y = \frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に2点 $A(-4,\ 4), B(6,\ 9)$ がある。直線 AB と y 軸との交点を C とする。

(1)　グラフ上の、O と B の間に点 P をとる。$\triangle PAB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積と等しくなるとき、P の座標を求めなさい。

(2)　グラフ上の、x 座標が -4 より小さい点 Q をとる。$\triangle QAB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積と等しくなるとき、Q の座標を求めなさい。



解き方　(1)　直線 AB の傾きは $\frac{9-4}{6-(-4)} = \frac{1}{2}$、切片は6。$P$ は O **を通り** AB **に平行な直線** $y = \frac{1}{2}x$ 上にある。

$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x$ より $x^2 - 2x = 0$、$x(x-2) = 0$。P は O と異なるので $x = 2$　　**答**　$P(2,\ 1)$

(2)　Q は AB について O と反対側にある。$C(0,\ 6)$ から上に $CO = 6$ だけ進んだ点 $(0,\ 12)$ を通り、AB に平行な直線 $y = \frac{1}{2}x + 12$ 上に Q がある。

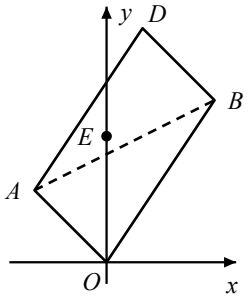
$\frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{2}x + 12$ より $x^2 - 2x - 48 = 0$、$(x+6)(x-8) = 0$。$x < -4$ だから $x = -6$　　**答**　$Q(-6,\ 9)$

例題4　面積の二等分 —— 中点・対角線の交点

例題3の2点 $A(-4,\ 4), B(6,\ 9)$ について、四角形 $OADB$ が平行四辺形になるように点 D をとる。

(1)　原点 O を通り、$\triangle OAB$ の面積を二等分する直線の式を求めなさい。

(2)　点 $E(0,\ 7)$ を通り、平行四辺形 $OADB$ の面積を二等分する直線の式を求めなさい。



解き方　(1)　O を通って二等分 → 辺 AB の**中点** M を通る。$M\left(\frac{-4+6}{2},\ \frac{4+9}{2}\right) = \left(1,\ \frac{13}{2}\right)$　　**答**　$y = \frac{13}{2}x$

(2)　平行四辺形の対角線 AB, OD は、それぞれの中点で交わる。AB の中点は(1)の M だから、M を通る直線は平行四辺形を二等分する。

$E(0,\ 7)$ と $M\left(1,\ \frac{13}{2}\right)$ を通る直線の傾きは $\frac{13}{2} - 7 = -\frac{1}{2}$　　**答**　$y = -\frac{1}{2}x + 7$

※ D の座標 $(2,\ 13)$ を求めなくても解ける（OD の中点も $\left(1,\ \frac{13}{2}\right)$ になる）。

練習1　スピード練習　座標・長さ・面積を文字で表す

目標6分

(1) 関数 $y=ax^2$ のグラフが点 $(-6,\ -12)$ を通るとき、a の値を求めなさい。

答

(2) 関数 $y=\dfrac{3}{4}x^2$ のグラフ上の、x 座標が -2 と6の2点を通る直線の式を求めなさい。

答

(3) 関数 $y=2x^2$ のグラフ上に2点 A, B があり、x 座標はそれぞれ $-1, 2$ である。$\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

答

(4) 関数 $y=\dfrac{1}{2}x^2$ のグラフ上の点 P の x 座標を t（$t>0$）とする。P を通り y 軸に平行な直線と、直線 $y=-x-2$ との交点を Q とする。線分 PQ の長さを t の式で表しなさい。

答

(5) 関数 $y=ax^2$（$a>0$）のグラフ上に2点 A, B があり、x 座標はそれぞれ $-3, 1$ である。$\triangle OAB$ の面積を a の式で表しなさい。

答

(6) $O(0,\ 0)$、$A(4,\ 1)$、$C(1,\ 3)$ とする。四角形 $OABC$ が平行四辺形となるとき、対角線の交点の座標を求めなさい。

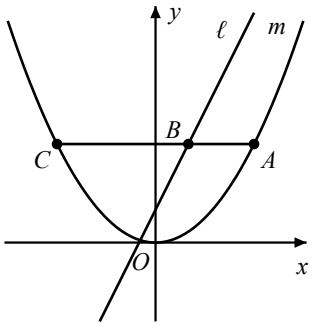
答

練習2　入試の形で ——「求め方」を全部書こう

目標15分

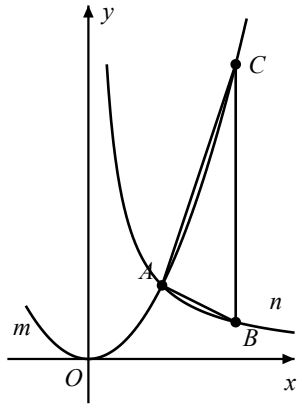
どちらも、答えを求める過程がわかるように、途中の式を含めた求め方も説明すること。ただし、原点Oから点(1，0)までの距離、原点Oから点(0，1)までの距離はそれぞれ1 cmであるとする。

(1) 右の図において、m は関数 $y=ax^2$（a は正の定数）のグラフを表し、ℓ は関数 $y=2x+1$ のグラフを表す。A は m 上の点であり、その x 座標は3である。C は、A を通り x 軸に平行な直線と m との交点のうち、A と異なる点である。B は、直線 AC と ℓ との交点であり、B の x 座標は C の x 座標より大きく、A の x 座標より小さい。線分 BC の長さが線分 AB の長さより 2 cm 長いときの a の値を求めなさい。



答

(2) 右の図において、m は関数 $y=ax^2$（a は正の定数）のグラフを表し、n は関数 $y=\dfrac{b}{x}$（b は正の定数）のグラフを表す。A は m と n との交点であり、その x 座標は2である。B は n 上の点であり、その x 座標は4である。C は、B を通り y 軸に平行な直線と m との交点である。A と B、A と C とをそれぞれ結ぶ。$\triangle ABC$ の面積が 7 cm^2 であるときの a, b の値をそれぞれ求めなさい。

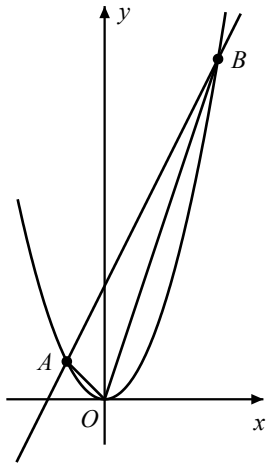


答

練習3　全国でよく出る形 —— 等積変形・面積の二等分

目標10分

(1) 右の図のように、関数 $y=x^2$ のグラフと直線 $y=2x+3$ が2点 A, B で交わっている。A の x 座標は B の x 座標より小さい。
2点 A, B の座標をそれぞれ求めなさい。



答

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

答

(3) 関数 $y=x^2$ のグラフ上の、O と B の間に点 P をとる。$\triangle PAB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積と等しくなるとき、P の座標を求めなさい。

答

(4) 原点 O を通り、$\triangle OAB$ の面積を二等分する直線の式を求めなさい。

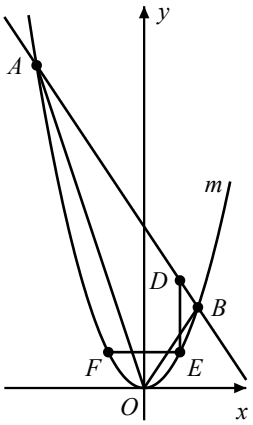
答

(5) x 軸上の、x 座標が正である点 R をとる。$\triangle RAB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積の2倍になるとき、R の座標を求めなさい。

答

確認テスト **10分で解こう**　　点数　　／100点

(1) 右の図において、m は関数 $y=ax^2$ のグラフを表し、m は点 $A(-4,\ 12)$ を通る。B は m 上の点であり、その x 座標は2である。
a の値を求めなさい。 **［15点］**



答

(2) 直線 AB の式を求めなさい。 **［15点］**

答

(3) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。 **［15点］**

答

(4) m 上の、A と O の間に点 P をとる。$\triangle PAB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積と等しくなるとき、P の座標を求めなさい。 **［20点］**

答

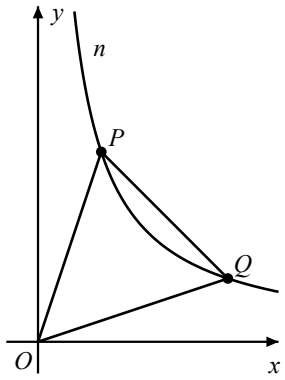
(5) 直線 AB 上に点 D をとり、その x 座標を t とする（$0<t<2$）。E は、D を通り y 軸に平行な直線と m との交点である。F は、E を通り x 軸に平行な直線と m との交点のうち、E と異なる点である。線分 DE の長さと線分 EF の長さが等しいときの t の値を求めなさい。答えを求める過程がわかるように、途中の式を含めた求め方も説明すること。ただし、原点Oから点(1，0)までの距離、原点Oから点(0，1)までの距離はそれぞれ1 cmであるとする。 **［35点］**

答

入試にチャレンジ1 **反比例のグラフと面積 —— 等積変形・二等分・求め方** 70点以上をめざす人へ

右の図のように、関数 $y=\dfrac{12}{x}$ のグラフ n 上に2点 $P(2,\ 6), Q(6,\ 2)$ がある。原点Oから点(1，0)までの距離、原点Oから点(0，1)までの距離はそれぞれ1 cmであるとする。

(1) $\triangle OPQ$ の面積を求めなさい。



答

(2) 点 P を通り、$\triangle OPQ$ の面積を二等分する直線の式を求めなさい。

答

(3) n 上に点 S をとり、その x 座標を s とする（$0<s<2$）。$\triangle OPS$ の面積が $\triangle OPQ$ の面積と等しいときの s の値を求めなさい。答えを求める過程がわかるように、途中の式を含めた求め方も説明すること。

答

解答（答えと短い解き方）

第3講　関数　放物線と直線・図形の面積、「求め方」を書く

練習1　スピード練習　座標・長さ・面積を文字で表す

(1)　$a = -\dfrac{1}{3}$

$-12 = a \times (-6)^2$ より $36a = -12$、$a = -\dfrac{1}{3}$

(2)　$y = 3x + 9$

傾き $\dfrac{3}{4} \times (-2+6) = 3$、切片 $-\dfrac{3}{4} \times (-2) \times 6 = 9$。（2点 $(-2,\ 3)$、$(6,\ 27)$ から求めてもよい。）

(3)　6

直線 AB の切片は $-2 \times (-1) \times 2 = 4$。$\triangle OAB = \dfrac{1}{2} \times 4 \times \{2-(-1)\} = 6$

(4)　$\dfrac{1}{2}t^2 + t + 2$

$P\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$ が上、$Q(t,\ -t-2)$ が下。$PQ = \dfrac{1}{2}t^2 - (-t-2) = \dfrac{1}{2}t^2 + t + 2$

(5)　$6a$

直線 AB の切片は $-a \times (-3) \times 1 = 3a$。$\triangle OAB = \dfrac{1}{2} \times 3a \times \{1-(-3)\} = 6a$

(6)　$\left(\dfrac{5}{2},\ 2\right)$

対角線の交点は、対角線 AC の中点。$\left(\dfrac{4+1}{2},\ \dfrac{1+3}{2}\right) = \left(\dfrac{5}{2},\ 2\right)$（$B(5,\ 4)$ を求めて OB の中点としてもよい。）

練習2　入試の形で ―― 「求め方」を全部書こう

(1)　$a = \dfrac{1}{3}$

$A(3,\ 9a)$、$C(-3,\ 9a)$、$B\left(\dfrac{9a-1}{2},\ 9a\right)$ を a で表し、$BC - AB = 2$ から $9a - 1 = 2$。

(2)　$a = \dfrac{1}{2}$、$b = 4$

A は m と n の交点だから $b = 8a$。$B(4,\ 2a)$、$C(4,\ 16a)$ で $\triangle ABC = \dfrac{1}{2} \times 14a \times 2 = 7$。

練習3　全国でよく出る形 ―― 等積変形・面積の二等分

(1)　$A(-1,\ 1)$、$B(3,\ 9)$

$x^2 = 2x + 3$ より $x^2 - 2x - 3 = 0$、$(x+1)(x-3) = 0$、$x = -1,\ 3$。y 座標は x^2 で 1 と 9。

(2)　6

直線 AB の切片は3。$\triangle OAB = \dfrac{1}{2} \times 3 \times \{3-(-1)\} = 6$

(3)　$P(2,\ 4)$

P は O を通り AB に平行な直線 $y = 2x$ 上にある。$x^2 = 2x$ より $x(x-2) = 0$。P は O と異なるので $x = 2$、$y = 4$。

(4)　$y = 5x$

辺 AB の中点 $\left(\dfrac{-1+3}{2},\ \dfrac{1+9}{2}\right) = (1,\ 5)$ を通る。O と $(1,\ 5)$ を通る直線は $y = 5x$。

(5)　$R\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$

y 軸上で $\triangle SAB = 12$ となる $S(0,\ -3)$ を通り AB に平行な直線 $y = 2x - 3$ と x 軸の交点（等積変形）。

確認テスト　10分で解こう

(1)　$a = \dfrac{3}{4}$

$12 = a \times (-4)^2$ より $16a = 12$、$a = \dfrac{3}{4}$

(2) $y=-\dfrac{3}{2}x+6$

$B(2,\ 3)$。傾き $\dfrac{3-12}{2-(-4)}=-\dfrac{3}{2}$、$(2,\ 3)$ を代入して切片6。

(3) 18

直線 AB の切片は6。$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times 6\times\{2-(-4)\}=18$

(4) $P(-2,\ 3)$

P は O を通り AB に平行な直線 $y=-\dfrac{3}{2}x$ 上にある。$\dfrac{3}{4}x^2=-\dfrac{3}{2}x$ より $x^2+2x=0$、$x(x+2)=0$。P は O と異なるので $x=-2$、$y=3$。

(5) $t=\dfrac{4}{3}$

$DE=-\dfrac{3}{2}t+6-\dfrac{3}{4}t^2$、$EF=2t$。$DE=EF$ から $3t^2+14t-24=0$、$0<t<2$ より $t=\dfrac{4}{3}$。

入試にチャレンジ1　反比例のグラフと面積 —— 等積変形・二等分・求め方

(1) 16 cm²

直線 PQ は $y=-x+8$。y 軸との交点 $G(0,\ 8)$ で $\triangle OGQ-\triangle OGP=24-8=16$。

(2) $y=-5x+16$

辺 OQ の中点 $(3,\ 1)$ を通る。$P(2,\ 6)$ と $(3,\ 1)$ を通る直線の傾きは $\dfrac{1-6}{3-2}=-5$。$y=-5x+b$ に $(2,\ 6)$ を代入して $b=16$。

(3) $s=\dfrac{2}{3}$

S, P から x 軸に垂線 SI, PH。$\triangle OPS$＝台形 $SIHP$ より $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{12}{s}+6\right)(2-s)=16$、$0<s<2$ で $s=\dfrac{2}{3}$。

くわしい解き方は創心館出版の攻略テキスト（別冊解答）に載っています。