第4講　放物線と図形

比例定数・変化の割合・直線の式 → 等積変形で点を2つ・四角形の頂点・回転体・反比例

要点の確認	例題	練習（入試の形）	確認テスト
10分	20分	35分	10分

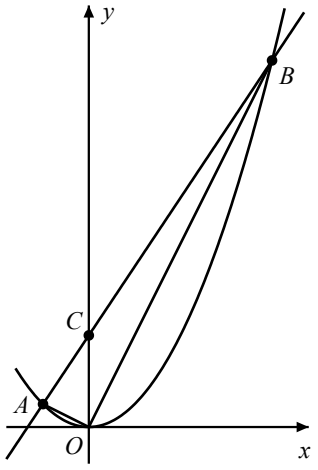
要点　放物線と図形で使う7つの道具

- ① **変化の割合**　$y=ax^2$ で、x の値が p から q まで増加するときの変化の割合は $a(p+q)$。例）-2 から 8 で $\frac{3}{2}$ → $6a=\frac{3}{2}$、$a=\frac{1}{4}$
- ② **2点を通る直線**　$y=ax^2$ 上の x 座標 p, q の2点を通る直線は　**傾き** $a(p+q)$**、切片** $-apq$（代入して確かめる）
- ③ $\triangle OAB$ **の面積**　直線 AB と y 軸の交点を C として　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times OC\times$（$A, B$ の x 座標の差）
- ④ **等積変形で点を2つ**　$\triangle PAB=\triangle OAB$ となる P は、O **を通り** AB **に平行な直線**の上と、y **軸上で** C **をはさんで** O **と反対側に** OC **と同じ長さの点** D **を通る平行線**の上。両側を必ず探す。
- ⑤ **平行四辺形の頂点**　四角形 $ABCD$ が平行四辺形 →「A **から** B **への動き」＝「**D **から** C **への動き」**（x, y の増え方が同じ）。
- ⑥ **回転体**　軸の上に1辺がある三角形を回すと、体積は　$\frac{1}{3}\times\pi\times$**（軸からの距離）**$^2\times$**（軸上の辺の長さ）**。ほかの三角形は「軸上に辺がある三角形の差」に分けて回す。
- ⑦ **長さの条件**（二等辺三角形・正方形）　点の座標を文字で表し、三平方の定理や辺の長さで2次方程式をつくる。$\sqrt{\ }$ が残ったら、$x>0$ などの条件で答えを選ぶ。

例題1　変化の割合・直線の式・三角形の面積

右の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に2点 A, B があり、x 座標はそれぞれ -2, 8 である。x の値が -2 から 8 まで増加するときの変化の割合は $\frac{3}{2}$ である。直線 AB と y 軸との交点を C とする。

(1)　a の値を求めなさい。　(2)　直線 AB の式を求めなさい。　(3)　$\triangle OAB$ の面積を求めなさい。



解き方　(1)　$x=-2$ のとき $y=4a$、$x=8$ のとき $y=64a$。変化の割合は $\frac{64a-4a}{8-(-2)}=6a$ だから $6a=\frac{3}{2}$　　**答**　$a=\frac{1}{4}$

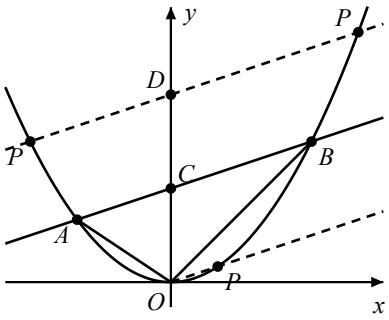
【速く解く】変化の割合 $=a(p+q)=a\times(-2+8)=6a$

(2)　$A(-2,\ 1)$、$B(8,\ 16)$。傾きは $\frac{16-1}{8-(-2)}=\frac{3}{2}$。$y=\frac{3}{2}x+b$ に $(-2,\ 1)$ を代入して $b=4$　　**答**　$y=\frac{3}{2}x+4$

(3)　$C(0,\ 4)$ だから　$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times 4\times\{8-(-2)\}=20$　　**答**　**20**

例題2　等積変形 —— 点は直線 AB の両側にある

関数 $y=\dfrac{1}{9}x^2$ のグラフ上に2点 A, B があり、x 座標はそれぞれ $-6, 9$ である。このグラフ上に点 P をとる。$\triangle PAB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積と等しくなるような点 P は、O 以外に3つある。それらの x 座標をすべて求めなさい。



解き方　$A(-6,\ 4)$、$B(9,\ 9)$。直線 AB は傾き $\dfrac{1}{9}\times(-6+9)=\dfrac{1}{3}$、切片 $-\dfrac{1}{9}\times(-6)\times 9=6$ で　$y=\dfrac{1}{3}x+6$、$C(0,\ 6)$。

O の側：O を通り AB に平行な直線 $y=\dfrac{1}{3}x$ との交点。$\dfrac{1}{9}x^2=\dfrac{1}{3}x$ より $x(x-3)=0$、O 以外は $x=3$。

反対側：y 軸上で $CD=CO=6$ となる点 $D(0,\ 12)$ をとると $\triangle DAB=\triangle OAB$。$D$ を通り AB に平行な直線 $y=\dfrac{1}{3}x+12$ との交点。$\dfrac{1}{9}x^2=\dfrac{1}{3}x+12$ より $x^2-3x-108=0$、$(x-12)(x+9)=0$、$x=12,\ -9$

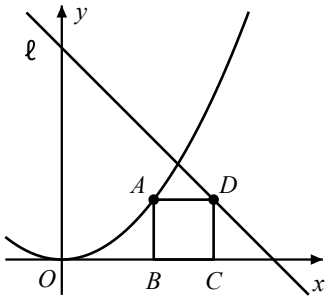
答　$x=-9,\ 3,\ 12$　　※「2つとれる」「すべて」と書いてあったら、**直線 AB の両側**を調べる。

例題3　正方形の頂点 —— 文字で表して2次方程式

右の図のように、関数 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ のグラフと直線 $\ell:\ y=-x+6$ がある。グラフ上の x 座標が t（$t>0$）の点を A とし、A から x 軸に垂線 AB をひく。AB を1辺とする正方形 $ABCD$ を、点 C が x 軸上で B の右側にあるようにつくる。

(1)　$t=2$ のとき、点 D の座標を求めなさい。

(2)　点 D が直線 ℓ 上にあるとき、t の値を求めなさい。



解き方　(1)　$A(2,\ 1)$ で $AB=1$。正方形だから $BC=1$、D は A から右へ1　　**答**　$D(3,\ 1)$

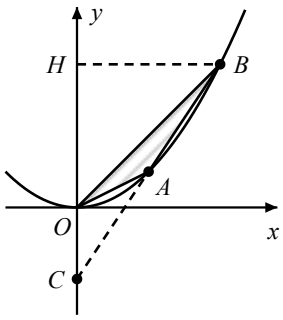
(2)　$A\left(t,\ \dfrac{1}{4}t^2\right)$、$AB=\dfrac{1}{4}t^2$ だから　$D\left(t+\dfrac{1}{4}t^2,\ \dfrac{1}{4}t^2\right)$。これが $y=-x+6$ 上にあるので

$\dfrac{1}{4}t^2=-\left(t+\dfrac{1}{4}t^2\right)+6$　→　$\dfrac{1}{2}t^2+t-6=0$　→　$t^2+2t-12=0$　→　$t=-1\pm\sqrt{13}$

$t>0$ だから　**答**　$t=-1+\sqrt{13}$　（$\sqrt{13}$ は約3.6 なので t は約2.6。図とも合う）

例題4　回転体――「軸上に辺がある三角形の差」で考える

関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に2点 $A(2,\ 1), B(4,\ 4)$ がある。直線 AB と y 軸との交点を C とする。$\triangle OAB$ を、y 軸を回転の軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。



解き方　直線 AB は傾き $\frac{1}{4}\times(2+4)=\frac{3}{2}$、切片 $-\frac{1}{4}\times2\times4=-2$ で　$y=\frac{3}{2}x-2$、$C(0,\ -2)$。

$\triangle OAB=\triangle OCB-\triangle OCA$。どちらも軸上に辺 OC（長さ2）がある三角形なので、要点⑥が使える。

$\triangle OCB$ を回した立体：$\frac{1}{3}\times\pi\times4^2\times2=\frac{32}{3}\pi$　（B から軸までの距離は4）

$\triangle OCA$ を回した立体：$\frac{1}{3}\times\pi\times2^2\times2=\frac{8}{3}\pi$　（A から軸までの距離は2）

$\frac{32}{3}\pi-\frac{8}{3}\pi=8\pi$　　**答**　8π

※ $\triangle OCB$ の立体は「C が頂点で半径4・高さ $CH=6$ の円すい」から「O が頂点で半径4・高さ $OH=4$ の円すい」を除いたもの。$\frac{1}{3}\pi\times16\times(6-4)$ となり、⑥の式と同じになる。

練習1　スピード練習　(1)(2)を1問1分で

目標6分

(1) 関数 $y=ax^2$ で、x の値が 1 から 5 まで増加するときの変化の割合が -3 であるとき、a の値を求めなさい。

答

(2) 関数 $y=3x^2$ のグラフ上の、x 座標が -1 と 2 の2点を通る直線の式を求めなさい。

答

(3) 関数 $y=x^2$ のグラフ上に2点 $A(-1,\ 1)$、$B(4,\ 16)$ がある。$\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

答

(4) 関数 $y=ax^2$ のグラフと、関数 $y=\frac{12}{x}$ のグラフが、x 座標が 2 の点で交わっている。a の値を求めなさい。

答

(5) 3点 $O(0,\ 0)$、$A(-3,\ 2)$、$B(1,\ 6)$ がある。四角形 $OABC$ が平行四辺形となるような点 C の座標を求めなさい。

答

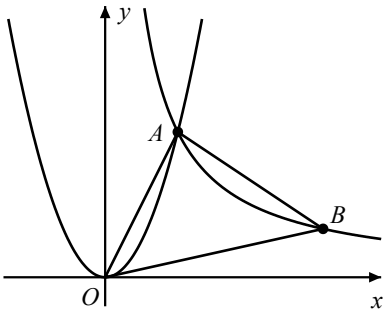
(6) 点 $A(3,\ 4)$ から x 軸に垂線 AH をひく。$\triangle OAH$ を、y 軸を回転の軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

答

練習2　入試の形で解こう（1）　放物線と反比例

目標10分

(1) 右の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフと関数 $y=\dfrac{18}{x}$ のグラフが点 A で交わっていて、A の x 座標は 3 である。また、点 B は関数 $y=\dfrac{18}{x}$ のグラフ上の点で、x 座標は 9 である。
a の値を求めなさい。



答

(2) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。

答

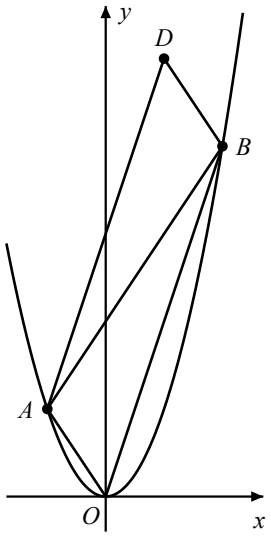
(3) y 軸上に点 C をとる。$\triangle ABC$ が $CA=CB$ の二等辺三角形となるとき、点 C の座標を求めなさい。

答

練習3　入試の形で解こう（2）　平行四辺形と等積変形

目標12分

(1) 右の図のように、関数 $y=ax^2$ のグラフ上に2点 $A(-2,\ 3), B$ があり、B の x 座標は 4 である。四角形 $OADB$ が平行四辺形となるように点 D をとる。
a の値を求めなさい。



答

(2) 点 D の座標を求めなさい。

答

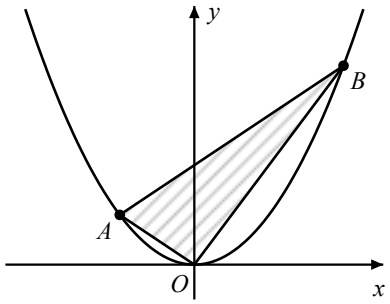
(3) 関数 $y=ax^2$ のグラフ上に点 P をとる。$\triangle PAB$ の面積が平行四辺形 $OADB$ の面積の $\dfrac{1}{2}$ となるような点 P のうち、x 座標が正であるものは2つある。その2つの点 P の x 座標を求めなさい。

答

練習4　入試の形で解こう（3）　x軸のまわりの回転体

目標12分

(1) 右の図のように、関数 $y = ax^2$ のグラフ上に2点 $A(-3,\ 2), B$ があり、B の x 座標は 6 である。
a の値を求めなさい。



答

(2) 直線 AB の式を求めなさい。

答

(3) $\triangle OAB$ を、x 軸を回転の軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。ただし、円周率は π とする。

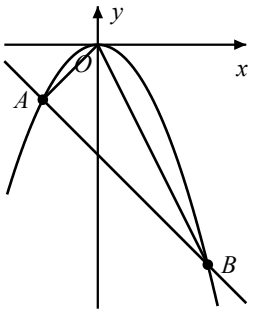
答

確認テスト **10分で解こう**　　点数　　／100点

(1) 関数 $y=ax^2$ で、x の値が -3 から 1 まで増加するときの変化の割合が 4 であるとき、a の値を求めなさい。 **[25点]**

答

(2) 右の図のように、関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上に2点 A, B があり、x 座標はそれぞれ $-2, 4$ である。
直線 AB の式を求めなさい。 **[25点]**



答

(3) $\triangle OAB$ の面積を求めなさい。 **[25点]**

答

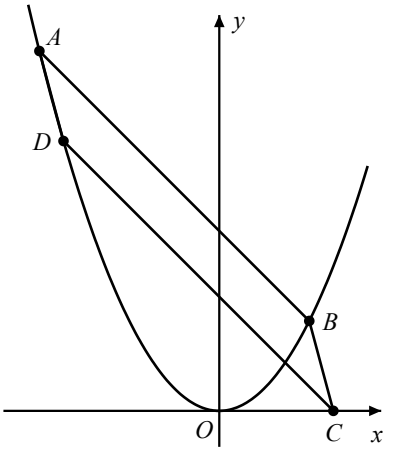
(4) 関数 $y=-\frac{1}{2}x^2$ のグラフ上の、A と B の間に点 P をとる（P は O と異なる）。$\triangle PAB$ の面積が $\triangle OAB$ の面積と等しくなるとき、点 P の座標を求めなさい。 **[25点]**

答

入試にチャレンジ1　平行四辺形の頂点と二等辺三角形

発展

(1) 右の図のように、関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上に2点 $A(-8,\ 16), B(4,\ 4)$ がある。点 C は x 軸上の点、点 D はこのグラフ上の x 座標が負の点で、四角形 $ABCD$ は平行四辺形である。
点 C の座標を求めなさい。



答

(2) 関数 $y=\frac{1}{4}x^2$ のグラフ上の、x 座標が負の点 P をとる。$\triangle OBP$ が $PO=PB$ の二等辺三角形となるとき、点 P の x 座標を求めなさい。

答

解答（答えと短い解き方）

第4講　放物線と図形

練習1　スピード練習　(1)(2)を1問1分で

(1)　$a=-\dfrac{1}{2}$

変化の割合は $a(1+5)=6a$。$6a=-3$ より $a=-\dfrac{1}{2}$

(2)　$y=3x+6$

傾き $3\times(-1+2)=3$、切片 $-3\times(-1)\times2=6$。（2点 $(-1,\ 3)$、$(2,\ 12)$ で確かめられる。）

(3)　10

直線 AB は傾き $-1+4=3$、切片 $-(-1)\times4=4$。$\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\times4\times\{4-(-1)\}=10$

(4)　$a=\dfrac{3}{2}$

交点の y 座標は $\dfrac{12}{2}=6$。$6=a\times2^2$ より $a=\dfrac{3}{2}$

(5)　$C(4,\ 4)$

A から B への動きは 右へ4・上へ4。O から C への動きも同じなので $C(4,\ 4)$。

(6)　24π

半径3・高さ4の円柱から、$\triangle OAK$（$K(0,\ 4)$）を回した円すい（半径3・高さ4）を除いた立体。$\pi\times3^2\times4-\dfrac{1}{3}\times\pi\times3^2\times4=36\pi-12\pi=24\pi$

練習2　入試の形で解こう（1）　放物線と反比例

(1)　$a=\dfrac{2}{3}$

A の y 座標は $\dfrac{18}{3}=6$ で $A(3,\ 6)$。$6=a\times3^2$ より $9a=6$、$a=\dfrac{2}{3}$

(2)　24

$B(9,\ 2)$。直線 AB は $y=-\dfrac{2}{3}x+8$。y 軸との交点 $(0,\ 8)$ で $\dfrac{1}{2}\times8\times(9-3)=24$

(3)　$C(0,\ -5)$

$C(0,\ c)$ とし、三平方の定理で $CA^2=3^2+(c-6)^2$、$CB^2=9^2+(c-2)^2$。等しいとおいて $c=-5$。

練習3　入試の形で解こう（2）　平行四辺形と等積変形

(1)　$a=\dfrac{3}{4}$

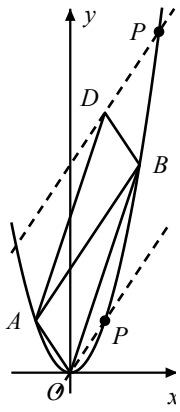
$3=a\times(-2)^2$ より $4a=3$、$a=\dfrac{3}{4}$

(2)　$D(2,\ 15)$

$B(4,\ 12)$。O から B への動き（右へ4・上へ12）と A から D への動きは同じ。

(3)　2 と $1+\sqrt{17}$

P は O または D を通り AB（傾き $\dfrac{3}{2}$）に平行な直線上。$y=\dfrac{3}{2}x$、$y=\dfrac{3}{2}x+12$ との交点。



練習4　入試の形で解こう（3）　x軸のまわりの回転体

(1)　$a = \dfrac{2}{9}$

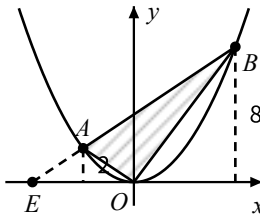
$2 = a \times (-3)^2$ より $9a = 2$、$a = \dfrac{2}{9}$

(2)　$y = \dfrac{2}{3}x + 4$

$B(6,\ 8)$。傾き $\dfrac{8-2}{6-(-3)} = \dfrac{2}{3}$、$(6,\ 8)$ を代入して切片4。

(3)　120π

AB と x 軸の交点 $E(-6,\ 0)$。$\triangle OEB$、$\triangle OEA$ を回した立体の差：$128\pi - 8\pi$。



確認テスト　10分で解こう

(1)　$a = -2$

変化の割合は $a \times (-3+1) = -2a$。$-2a = 4$ より $a = -2$

(2)　$y = -x - 4$

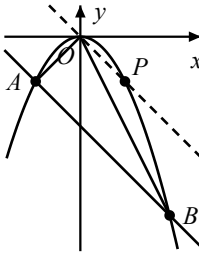
$A(-2,\ -2)$、$B(4,\ -8)$。傾き $\dfrac{-8-(-2)}{4-(-2)} = -1$、$(-2,\ -2)$ を代入して切片 -4。

(3)　12

直線 AB と y 軸の交点は $(0,\ -4)$。$\dfrac{1}{2} \times 4 \times \{4-(-2)\} = 12$

(4)　$P(2,\ -2)$

P は O を通り AB に平行な直線 $y = -x$ 上にある。$-\dfrac{1}{2}x^2 = -x$ より $x^2 - 2x = 0$、$x = 0,\ 2$。P は O と異なるので $x = 2$、$y = -2$。



入試にチャレンジ1　平行四辺形の頂点と二等辺三角形

(1)　$C(12 - 4\sqrt{3},\ 0)$

A から B への動き（右へ12・下へ12）＝D から C。D の y 座標は12で $D(-4\sqrt{3},\ 12)$。

(2)　$-2 - 2\sqrt{5}$

$P\left(t,\ \dfrac{1}{4}t^2\right)$ として $PO^2 = PB^2$ から $t^2 + 4t - 16 = 0$、$t < 0$ より $t = -2 - 2\sqrt{5}$。

くわしい解き方は創心館出版の攻略テキスト（別冊解答）に載っています。