第2講　小問集合②：確率・数の性質・データと標本調査

きまり・操作のある確率 → 2けた・3けたの数の入れかえ（素数・倍数の条件）→ 2回の抽出・相対度数・平均値の逆算

要点の確認	例題	練習（入試の形）	確認テスト
10分	20分	35分	10分

要点　確率・数の性質・データで使う道具

- **① 確率は「全部書く」**　さいころ2個は36通りの**表**に、カードを同時に取り出すときは**組**（$\{1,\ 2\}$ と $\{2,\ 1\}$ は同じ）で全部書く。きまり・操作がある問題は、1通りずつ**操作のあとのようす**を書いて、条件に合うものに○をつける。
- **② 数を文字で表す**　2けた：$10x+y$、入れかえた数 $10y+x$。和 $=11(x+y)$、差 $=9(x-y)$。
  3けた：$100x+10y+z$。百の位と一の位を入れかえた数との差 $=99(x-z)$、和 $=101(x+z)+20y$。
  位の数の範囲：x は1〜9、y・z は0〜9（「一の位は0でない」なら1〜9）。
- **③ 候補をしぼる**　式を整理して「$x+y=11$」「$x-y=3$」のような**1つの式**にする → 範囲から候補を**全部**書く → 残りの条件（素数・倍数・2乗）で1つずつ確かめる。
  4の倍数 … 下2けたが4の倍数。3の倍数・9の倍数 … 各位の数の和が3の倍数・9の倍数。2けたの素数は 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97。
- **④ 標本調査**　「標本での割合」＝「全体での割合」で比の式をつくる。2回取り出す問題は、**変わらない数を文字**にして式を2つ立てる。答えは「およそ○個」。
- **⑤ 度数・平均値**　度数 ＝ 相対度数 × 度数の合計。平均値の逆算は**合計**で考える（合計 ＝ 平均値 × 人数）。1つの値を直すと、合計の変化 ＝ 平均値の変化 × 人数。

例題1　きまりのある確率 —— 36通りを表に全部書く

A, B 2つのさいころを同時に投げ、A の出る目の数を a、B の出る目の数を b とする。次のきまりにしたがって得点を決めるとき、得点が素数になる確率を求めなさい。1から6までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。
きまり：b が a の倍数のときは $b\div a$ の値を得点とし、b が a の倍数でないときは $a+b$ の値を得点とする。

解き方　全部で $6\times6=36$（通り）。36通りすべての得点を表に書き、素数に○をつける（1は素数ではない）。

$a\diagdown b$	1	2	3	4	5	6
1	1	2○	3○	4	5○	6
2	3○	1	5○	2○	7○	3○
3	4	5○	1	7○	8	2○
4	5○	6	7○	1	9	10
5	6	7○	8	9	1	11○
6	7○	8	9	10	11○	1

$a=1$ のとき b はいつも1の倍数なので得点は b。$a=b$ のときは得点1（素数ではない）。
○は $3+5+3+2+2+2=17$（通り）。　**答**　$\dfrac{17}{36}$

例題2　2けたの数の入れかえ ―― 文字で表して候補をしぼる

a を一の位の数が0でない2けたの自然数とし、b を a の十の位の数と一の位の数とを入れかえてできる自然数とする。次の2つの条件を同時に満たす a の値をすべて求めなさい。

・$a+b$ の値は、ある自然数の2乗である。

・a は素数である。

解き方　a の十の位の数を x、一の位の数を y とする（x, y は1から9までの整数）。$a=10x+y$、$b=10y+x$ だから $a+b=11x+11y=11(x+y)$

$11(x+y)$ が自然数の2乗になるのは、$x+y$ が $11\times$（自然数の2乗）のとき。$2 \leqq x+y \leqq 18$ だから　$x+y=11$

（このとき $a+b=121=11^2$）

$x+y=11$ になる a は 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92。偶数（38, 56, 74, 92）と5の倍数（65）を除くと、29, 47, 83 で、どれも素数。　**答**　$a=29,\ 47,\ 83$

【確かめ】$29+92=121$、$47+74=121$、$83+38=121$ で、どれも 11^2。

例題3　2回の抽出による推定 ―― 「変わらない数」を文字にする

袋の中に、赤玉と白玉が合わせてたくさん入っている。この袋から40個の玉を無作為に取り出したところ、赤玉は12個だった。取り出した玉をすべて袋にもどしたあと、袋から白玉だけを120個取り除いてよくかき混ぜ、再び40個の玉を無作為に取り出したところ、赤玉は15個だった。初めに袋に入っていた赤玉は、およそ何個と推定できますか。

解き方　初めの赤玉を x 個、玉全体を y 個とする。取り除いたのは白玉だけなので、**赤玉の数 x は変わらない**。

1回目：$x:y=12:40$ より　$y=\dfrac{10}{3}x$ …①

2回目：全体は $(y-120)$ 個。$x:(y-120)=15:40$ より　$y-120=\dfrac{8}{3}x$ …②

①を②に代入して　$\dfrac{10}{3}x-120=\dfrac{8}{3}x$　$\dfrac{2}{3}x=120$　$x=180$（$y=600$）　**答　およそ180個**

【確かめ】初めは600個中180個で $\dfrac{180}{600}=\dfrac{3}{10}$（40個中12個）。白玉を除いたあとは480個中180個で $\dfrac{180}{480}=\dfrac{3}{8}$（40個中15個）。

練習1　例題のたしかめ　同時に取り出す組・3けたの数の差

目標4分

(1) 1, 2, 3, 4, 5 の数が1つずつ書いてある5枚のカードから同時に2枚を取り出すとき、2枚のカードの数の積が素数になる確率を求めなさい。どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。

答

(2) a を一の位の数が0でない3けたの自然数とし、b を a の百の位の数と一の位の数とを入れかえてできる3けたの自然数とする。$a-b=594$ で、a の各位の数の和が10であるとき、a の値をすべて求めなさい。

答

練習2　スピード練習　1問1分で

目標5分

(1) A, B 2つのさいころを同時に投げるとき、出る目の数の和が素数になる確率を求めなさい。

答

(2) n を一の位の数が0でない2けたの自然数とし、m を n の十の位の数と一の位の数とを入れかえてできる自然数とする。$n-m=45$ となる n の値をすべて求めなさい。

答

(3) 白い碁石だけがたくさん入っている袋に、黒い碁石を80個入れてよくかき混ぜた。そこから50個を無作為に取り出したところ、黒い碁石は4個だった。袋の中に初めに入っていた白い碁石は、およそ何個と推定できますか。

答

(4) 5人の生徒の上体起こしの回数の平均値は 24.2 回だった。もう1人の記録を加えた6人の平均値は 25 回になった。加えた1人の回数を求めなさい。

答

練習3　入試の形で解こう（1）条件の複雑な確率

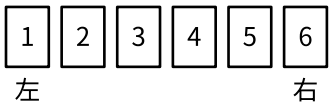
目標10分

どの問題も、どの目が出ることも、どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとします。

(1) A, B 2つのさいころを同時に投げ、A の出る目の数を a、B の出る目の数を b とする。十の位の数が a、一の位の数が b である2けたの自然数が素数になる確率を求めなさい。

答

(2) 右の図のように、1から6までの数が1つずつ書いてある6枚のカードが、左から小さい順に並んでいる。大小2つのさいころを同時に投げ、大きいさいころの出る目の数を a、小さいさいころの出る目の数を b とする。a と b が異なるときは、左から a 番目のカードと b 番目のカードを入れかえ、a と b が同じときはカードを動かさない。このあと、左から3枚のカードの数を順に百の位、十の位、一の位の数とする3けたの自然数が、4の倍数になる確率を求めなさい。

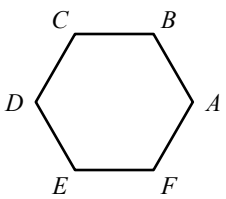


答

(3) 1, 2, 3, 4, 5, 6 の数が1つずつ書いてある6枚のカードが箱に入っている。この箱から3枚のカードを同時に取り出し、取り出した3枚のカードに書いてある数を、それぞれ3本の棒の長さ（cm）とする。この3本の棒を3辺とする三角形ができる確率を求めなさい。ただし、最も長い棒の長さが他の2本の長さの和より小さいとき、三角形ができるものとする。

答

(4) 右の図のような正六角形 $ABCDEF$ があり、2点 P, Q ははじめ頂点 A にある。大小2つのさいころを同時に投げ、大きいさいころの出る目の数を a、小さいさいころの出る目の数を b とする。点 P は $A \to B \to C \to \cdots$ の向きに頂点を a 個進み、点 Q は $A \to F \to E \to \cdots$ の向きに頂点を b 個進む（6個進むと A にもどる）。3点 A, P, Q を結んでできる図形が直角三角形になる確率を求めなさい。



答

練習4　入試の形で解こう（2）数の性質

目標13分

(1) n を2けたの自然数とする。n が、n の十の位の数と一の位の数との和の4倍より3大きいとき、n の値をすべて求めなさい。

答

(2) a を一の位の数が0でない2けたの自然数とし、b を a の十の位の数と一の位の数とを入れかえてできる自然数とする。$a-b=27$ であり、a が素数であるとき、a の値を求めなさい。

答

(3) a を一の位の数が0でない2けたの自然数とし、b を a の十の位の数と一の位の数とを入れかえてできる自然数とする。次の2つの条件を同時に満たす a の値をすべて求めなさい。

・$a-b$ の値は正の数であり、ある自然数の2乗である。

・$a+b$ の値は4の倍数である。

答

(4) n を3けたの自然数とする。次の2つの条件を同時に満たす n の値をすべて求めなさい。

・n の十の位の数は、n の百の位の数と一の位の数との和に等しい。

・n は21の倍数である。

答

練習5　入試の形で解こう（3）データと標本調査

目標12分

(1) ある農園でとれた6000個のみかんから、50個を無作為に抽出して重さを調べ、下の度数分布表にまとめた。とれた6000個のみかんのうち、重さが100 g以上のみかんはおよそ何個と推定できますか。

重さ（g）	70以上～80未満	80～90	90～100	100～110	110～120	合計
度数（個）	4	11	17	12	6	50

答

(2) A中学校の3年生120人とB中学校の3年生75人の通学時間を、それぞれ度数分布表にまとめた。20分以上30分未満の階級について比べると、度数はA中学校の方がB中学校より12人多く、相対度数はA中学校の方がB中学校より0.04大きかった。A中学校の、この階級の度数を求めなさい。

答

(3) 下の表は、ある中学校の3年生30人のハンドボール投げの記録を度数分布表にまとめたものである。この表から、階級値を用いて求めた平均値は 21.2 m であった。x, y の値をそれぞれ求めなさい。

記録（m）	10以上～14未満	14～18	18～22	22～26	26～30	30～34	合計
度数（人）	3	x	9	y	5	2	30

答

(4) 10人のテスト（100点満点）の得点の平均値を求めたが、1人の得点を、十の位の数と一の位の数とを入れかえた数とまちがえて計算していた。この人の正しい得点で計算し直すと、平均値は 2.7 点大きくなった。この人の正しい得点は2けたで、十の位の数と一の位の数との和は13である。この人の正しい得点を求めなさい。

答

確認テスト **10分で解こう**　　点数　　／100点

(1) ある中学校の全校生徒840人から60人を無作為に抽出してアンケートを行ったところ、「毎日朝食を食べる」と答えた生徒は51人だった。この中学校で「毎日朝食を食べる」生徒は、およそ何人と推定できますか。 **[20点]**

答

(2) A, B 2つのさいころを同時に投げ、A の出る目の数を a、B の出る目の数を b とするとき、ab の値が4の倍数になる確率を求めなさい。1から6までのどの目が出ることも同様に確からしいものとする。 **[20点]**

答

(3) 2けたの自然数 n の十の位の数と一の位の数との積を p、和を q とする。$n = p + q$ であり、n が素数であるとき、n の値をすべて求めなさい。 **[20点]**

答

(4) 箱 A には 2, 3, 4, 5 の数が1つずつ書いてある4枚のカードが、箱 B には 4, 5, 6, 7, 8, 9 の数が1つずつ書いてある6枚のカードが入っている。A, B それぞれの箱から1枚ずつカードを取り出し、箱 A から取り出したカードの数を a、箱 B から取り出したカードの数を b とするとき、b を a でわった余りが1になる確率を求めなさい。どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。 **[20点]**

答

(5) a を一の位の数が0でない3けたの自然数とし、b を a の百の位の数と一の位の数とを入れかえてできる3けたの自然数とする。$a + b = 888$ であり、$a > b$ であるとき、a の値をすべて求めなさい。 **[20点]**

答

入試にチャレンジ1 **カードの交換・3けたの数と平方数**　　70点以上をめざす人へ

(1) 箱 A には 1, 2, 3, 4 の数が1つずつ書いてある4枚のカードが、箱 B には 5, 6, 7 の数が1つずつ書いてある3枚のカードが入っている。箱 A から1枚のカードを取り出して箱 B に入れ、よくかき混ぜてから、箱 B から1枚のカードを取り出して箱 A に入れる。このとき、箱 A の4枚のカードに書いてある数の積が、箱 B の3枚のカードに書いてある数の積より大きくなる確率を求めなさい。どのカードが取り出されることも同様に確からしいものとする。

答

(2) a を一の位の数が0でない3けたの自然数とし、b を a の百の位の数と一の位の数とを入れかえてできる3けたの自然数とする。次の2つの条件を同時に満たす a の値をすべて求めなさい。

・$a-b=297$ である。

・$\sqrt{a+b}$ の値は自然数である。

答

解答（答えと短い解き方）

第2講　小問集合②：確率・数の性質・データと標本調査

練習1　例題のたしかめ　同時に取り出す組・3けたの数の差

(1)　$\dfrac{3}{10}$

組は10通り。積が素数は「1と素数」の組だけで、$\{1,2\},\{1,3\},\{1,5\}$ の3通り。

(2)　$a=721,\ 802$

$a-b=99(x-z)=594$ より $x-z=6$。十の位 $y=10-x-z$ が0以上になるものを選ぶ。

練習2　スピード練習　1問1分で

(1)　$\dfrac{5}{12}$

和が $2,3,5,7,11$ になるのは $1+2+4+6+2=15$（通り）。$\dfrac{15}{36}$

(2)　$n=61,\ 72,\ 83,\ 94$

$n-m=9(x-y)=45$ より $x-y=5$。一の位が0の $(5,\ 0)$ は除く。

(3)　およそ920個

黒を入れたあとの全体を x 個として　$80:x=4:50$、$x=1000$。$1000-80$

(4)　29回

6人の合計 $25\times6=150$、5人の合計 $24.2\times5=121$。$150-121$

練習3　入試の形で解こう（1）条件の複雑な確率

(1)　$\dfrac{2}{9}$

一の位が $2,4,5,6$ は×で、$b=1,\ 3$ だけ調べる。$21,33,51,63$ を除く8通りが素数。$\dfrac{8}{36}$

(2)　$\dfrac{1}{9}$

4の倍数は下2けたで決まる。下2けたが「32」「24」になる入れかえで4通り。$\dfrac{4}{36}$

(3)　$\dfrac{7}{20}$

取り出し方は20通り。1をふくむ組は $1+b\leqq c$ でどれも×。ふくまない10組のうち○は7通り。

(4)　$\dfrac{1}{3}$

AD,BE,CF は直径（円周角 90°）。2点が向かい合う頂点になる場合が $4+4+4=12$（通り）。

練習4　入試の形で解こう（2）数の性質

(1)　$n=11,\ 23,\ 35,\ 47,\ 59$

$10x+y=4(x+y)+3$ より $y=2x-1$。y は0から9なので $x=1$〜5。

(2)　$a=41$

$a-b=9(x-y)=27$ より $x-y=3$。$41,52,63,74,85,96$ のうち素数は41。

(3)　$a=62,\ 84$

$9(x-y)$ が自然数の2乗で $x-y=1,\ 4$。$a+b=11(x+y)$ の $x+y$ が4の倍数になるのは $x-y=4$、$y=2,\ 4$。

(4)　$n=231,\ 462,\ 693$

$n=11(10x+z)$。$10x+z$ が21の倍数で $x+z\leqq9$ なのは $21,42,63$。

練習5　入試の形で解こう（3）データと標本調査

(1)　およそ2160個

標本50個のうち100 g以上は $12+6=18$（個）。$6000\times\dfrac{18}{50}$

(2) 24人

A中学校を x 人、B中学校を $(x-12)$ 人として　$\dfrac{x}{120}-\dfrac{x-12}{75}=0.04$

(3) $x=6$、$y=5$

度数の合計から $x+y=11$、（階級値×度数）の合計から $2x+3y=27$。連立して解く。

(4) 85点

正しい得点 $10x+y$、まちがえた得点 $10y+x$。$9(x-y)=27$ と $x+y=13$ を連立。

確認テスト　10分で解こう

(1) およそ714人

$840\times\dfrac{51}{60}=714$（人）

(2) $\dfrac{5}{12}$

少なくとも一方が4：11通り。どちらも4でなく2つとも2か6：4通り。$\dfrac{15}{36}$

(3) $n=19,\ 29,\ 59,\ 79,\ 89$

$10x+y=xy+x+y$ より $9x=xy$、$y=9$。19〜99 のうち素数を選ぶ。

(4) $\dfrac{1}{3}$

全部で $4\times6=24$（通り）。条件に合うのは $3+2+2+1=8$（通り）。$\dfrac{8}{24}$

(5) $a=543,\ 642,\ 741$

$a+b=101(x+z)+20y$。一の位から $x+z=8$、$808+20y=888$ で $y=4$。$x>z$ の3つ。

入試にチャレンジ1　カードの交換・3けたの数と平方数

(1) $\dfrac{5}{16}$

取り出し方は $4\times4=16$（通り）。（A の積, B の積）を全部書くと○は5通り。

(2) $a=461,\ 693$

$99(x-z)=297$ より $x-z=3$。$a+b=101(x+z)+20y$ が2乗になるのは 625 と 1089。

くわしい解き方は創心館出版の攻略テキスト（別冊解答）に載っています。