第5講　空間図形

直角三角形を取り出す → 体積から逆算・三角すいの体積 → 垂線（体積を2通りに）→ 切断・動く点・回転体

要点の確認	例題	練習（入試の形）	確認テスト
10分	20分	35分	10分

要点　空間図形の入試で使う6つの道具

- **① 直角三角形を取り出す**　空間の線分の長さは、その線分を1辺とする直角三角形を見つけて三平方の定理。直方体の対角線は $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$。中点や平行な線があれば、平面図形と同じように相似・中点連結定理が使える。
- **② 逆算は方程式で**　体積や表面積がわかっているときは、求める辺を x として式を立てる。直方体の表面積 $=2(ab+bc+ca)$、円すいの表面積 $=\pi r^2+\pi r\ell$（ℓ は母線）。
- **③ 三角すいは底面を選びなおす**　（すいの体積）$=\dfrac{1}{3}\times$（底面積）$\times$（高さ）。三角すいはどの面を底面にしてもよい。直角が集まっている頂点を使うと、辺がそのまま高さになる。
- **④ 垂線の長さは体積を2通りに**　同じ三角すいを「わかる底面と高さ」で体積を出し、次に「垂線をひいた面を底面、垂線を高さ h」として式を作る。$\dfrac{1}{3}\times S\times h=V$ から $h=\dfrac{3V}{S}$。
- **⑤ 切断は同じ面の上の2点を結ぶ**　平行な2つの面には平行な切り口の線ができる。同じ面の上に2点がないときは、辺を**延長**して交点を作る。体積は「延長して三角すいの差」（相似比 $a:b$ → 体積比 $a^3:b^3$）や、三角すいの体積比（辺の比の積）で。
- **⑥ 角度と回転体**　3辺が等しい → 正三角形で 60°。三平方の定理の逆 → 90°。回転の軸に垂直な線分は円の半径になり、直角三角形を直角をはさむ辺のまわりに回すと円すいになる。

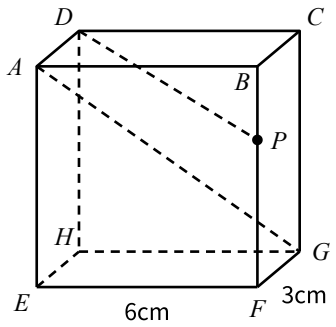
例題1　直方体の長さ ―― 表面積から辺を逆算・空間の対角線

右の図の直方体 $ABCD\text{-}EFGH$ で、$AB=6$ cm、$AD=3$ cm であり、表面積は 144 cm² である。

(1)　辺 AE の長さを求めなさい。

(2)　対角線 AG の長さを求めなさい。

(3)　辺 BF 上に $BP:PF=1:2$ となる点 P をとる。線分 DP の長さを求めなさい。



解き方　(1)　$AE=x$ cm とする。表面積は $2(6\times3+3x+6x)=36+18x$。$36+18x=144$ より $x=6$　　**答　6 cm**

(2)　底面の $\triangle EFG$ で $EG^2=6^2+3^2=45$。AE は底面に垂直だから $\triangle AEG$ は $\angle AEG=90^\circ$ の直角三角形。

$AG=\sqrt{EG^2+AE^2}=\sqrt{45+36}=\sqrt{81}=9$　　**答　9 cm**

（公式で $\sqrt{6^2+3^2+6^2}=9$ としてもよい。）

(3)　$BP=6\times\dfrac{1}{3}=2$。上の面で $BD^2=6^2+3^2=45$。BF は上の面に垂直だから $\triangle DBP$ は $\angle DBP=90^\circ$ の直角三角形。$DP=\sqrt{45+2^2}=\sqrt{49}=7$　　**答　7 cm**

※ 空間の線分は「その線分を斜辺とする直角三角形」を探す。BD^2 のように**2乗のまま**使うと計算が楽。

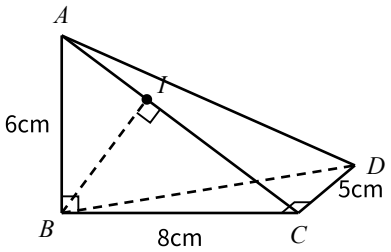
例題2　三角すいの体積と垂線の長さ ―― 体積を2通りに表す

右の図の三角すい $A\text{-}BCD$ で、辺 AB は面 BCD に垂直、$\angle BCD = 90^\circ$ であり、$AB = 6$ cm、$BC = 8$ cm、$CD = 5$ cm である。

(1)　三角すい $A\text{-}BCD$ の体積を求めなさい。

(2)　$\triangle ACD$ の面積を求めなさい。

(3)　点 B から面 ACD に垂線 BI をひく。線分 BI の長さを求めなさい。



解き方　(1)　底面を $\triangle BCD$ とすると、高さは AB。$\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{2} \times 8 \times 5 \right) \times 6 = 40$　　**答　40 cm³**

(2)　$\triangle ABC$ で $AC = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$。$CD \perp BC$、$CD \perp AB$ だから、CD は面 ABC に垂直で $CD \perp AC$。$\triangle ACD = \dfrac{1}{2} \times 10 \times 5 = 25$　　**答　25 cm²**

（確かめ：$BD^2 = 8^2 + 5^2 = 89$、$AD^2 = 6^2 + 89 = 125$。$AC^2 + CD^2 = 100 + 25 = 125 = AD^2$ だから、三平方の定理の逆で $\angle ACD = 90^\circ$。）

(3)　同じ三角すいを、底面 $\triangle ACD$・高さ BI と見る。$\dfrac{1}{3} \times 25 \times BI = 40$　より　$BI = \dfrac{120}{25} = \dfrac{24}{5}$　　**答　$\dfrac{24}{5}$ cm**

（面 ABC と面 ACD は垂直なので、I は辺 AC 上にある。$\triangle ABC$ の面積を2通りに表して $\dfrac{1}{2} \times 6 \times 8 = \dfrac{1}{2} \times 10 \times BI$ からも $BI = \dfrac{24}{5}$。）

例題3　空間の角度・動く点・垂線・回転体

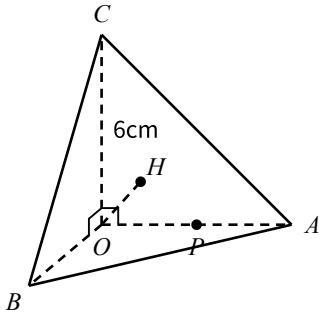
右の図の三角すい $O\text{-}ABC$ は、$OA = OB = OC = 6$ cm で、$\angle AOB = \angle BOC = \angle COA = 90^\circ$ である。

(1)　$\angle ABC$ の大きさを求めなさい。

(2)　点 P は O を出発し、辺 OA 上を毎秒 1 cm の速さで A まで動き、A で止まる。$\triangle PBC$ の面積が $9\sqrt{6}$ cm² になるのは、P が出発してから何秒後か求めなさい。

(3)　点 O から $\triangle ABC$ に垂線 OH をひく。線分 OH の長さを求めなさい。

(4)　$\triangle OAH$ を、直線 OH を軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。



解き方　(1)　AB, BC, CA は、どれも直角をはさむ2辺が 6 cm の直角二等辺三角形の斜辺で、長さは $6\sqrt{2}$ cm。3辺が等しいので $\triangle ABC$ は正三角形。　　**答　60°**

(2)　t 秒後に $OP = t$。BC の中点を M とすると、$PB = PC$ だから $PM \perp BC$。$\triangle OBC$ は直角二等辺三角形なので $OM \perp BC$、$OM = BM = 3\sqrt{2}$。OP は面 OBC に垂直だから $PM = \sqrt{t^2 + 18}$。

$\triangle PBC = \dfrac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times \sqrt{t^2 + 18} = 9\sqrt{6}$　より　$\sqrt{t^2 + 18} = 3\sqrt{3}$、$t^2 = 9$。$0 \leqq t \leqq 6$ だから $t = 3$　　**答　3 秒後**

(3)　三角すいの体積は $\dfrac{1}{3} \times \left(\dfrac{1}{2} \times 6 \times 6 \right) \times 6 = 36$。正三角形 ABC の高さは $6\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}$ で、面積は $\dfrac{1}{2} \times 6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6} = 18\sqrt{3}$。$\dfrac{1}{3} \times 18\sqrt{3} \times OH = 36$ より $OH = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$　　**答　$2\sqrt{3}$ cm**

(4)　$OH \perp AH$ だから、底面の半径 AH、高さ OH の円すいができる。$AH = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$。$\dfrac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{6})^2 \times 2\sqrt{3} = 16\sqrt{3}\pi$　　**答　$16\sqrt{3}\pi$ cm³**

例題4　三角柱の切断 —— 切り口の面積・延長して三角すいの差・交点・五角形の切り口

図1の三角柱 $ABC\text{-}DEF$ は、底面が $AB=AC=10$ cm、$BC=12$ cm の二等辺三角形で、高さ $AD=3$ cm である。辺 AB, AC の中点をそれぞれ P, Q とし、4点 P, Q, F, E を通る平面でこの三角柱を切る。

(1)　切り口の四角形 $PEFQ$ の面積を求めなさい。

(2)　頂点 A をふくむ方の立体の体積を求めなさい。

(3)　辺 BC の中点を N とする。線分 DN と切り口との交点を X とするとき、四角すい $X\text{-}BCFE$ の体積を求めなさい。

(4)　図2のように、辺 AB, BE, EF の中点をそれぞれ K, L, M とする。3点 K, L, M を通る平面で三角柱を切ると、切り口は五角形になる。この平面と辺 AC との交点を R とするとき、線分 AR の長さを求めなさい。

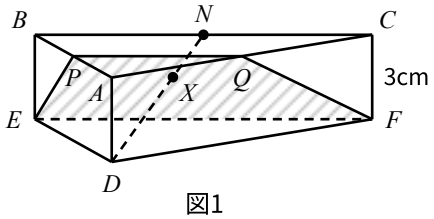


図1

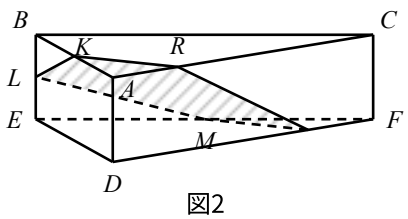


図2

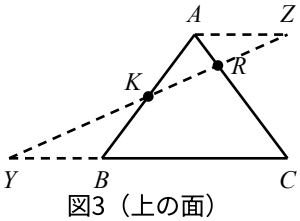


図3（上の面）

解き方　(1)　中点連結定理で $PQ=\dfrac{1}{2}BC=6$。A から BC への高さは $AN=\sqrt{10^2-6^2}=8$ で、PQ の中点 I は AN の中点（$IN=4$）。EF の中点を J とすると、$\triangle INJ$ は $\angle INJ=90^\circ$、$NJ=3$ の直角三角形で $IJ=\sqrt{4^2+3^2}=5$。左右対称なので IJ は台形の高さ。$\dfrac{1}{2}\times(6+12)\times5=45$　　**答　45 cm²**

(2)　直線 AD, PE, QF を延長すると1点 O で交わる。$PQ:EF=1:2$ だから $OA:OD=1:2$ で、$OA=AD=3$、$OD=6$。$\triangle DEF=\dfrac{1}{2}\times12\times8=48$。三角すい $O\text{-}DEF=\dfrac{1}{3}\times48\times6=96$。三角すい $O\text{-}APQ$ は相似比 $1:2$、体積比 $1:8$ で $96\times\dfrac{1}{8}=12$。$96-12=84$　　**答　84 cm³**

(3)　D, N をふくむ長方形 $ANJD$（横 8 cm、たて 3 cm）の中で考える。切り口とこの長方形が交わる線は IJ だから、X は DN と IJ の交点。$IN\parallel DJ$ より $\triangle XIN\backsim\triangle XJD$ で　$NX:XD=IN:DJ=4:8=1:2$

D から面 $BCFE$ までの距離は 8 cm だから、X から面 $BCFE$ までの距離は $8\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{8}{3}$。四角すい $X\text{-}BCFE=\dfrac{1}{3}\times(12\times3)\times\dfrac{8}{3}=32$　　**答　32 cm³**

(4)　面 $BCFE$ で直線 ML を延長し、直線 CB との交点を Y とする。$LB=LE$、対頂角、$\angle LBY=\angle LEM=90^\circ$ より $\triangle LBY\equiv\triangle LEM$ で $BY=EM=6$。Y も切り口の平面の上にあるので、図3（上の面）で直線 YK と AC の交点が R。

A を通り BC に平行な直線と直線 YK の交点を Z とすると、$\triangle KAZ\equiv\triangle KBY$ で $AZ=BY=6$。$AZ\parallel YC$ より $AR:RC=AZ:YC=6:18=1:3$。$AR=10\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{5}{2}$　　**答　$\dfrac{5}{2}$ cm**

スピード練習 **1問1分で** 目標10分

(1) 縦 2 cm、横 6 cm、高さ 9 cm の直方体の対角線の長さを求めなさい。

答

(2) 底面の半径が 5 cm、母線の長さが 13 cm の円すいの高さを求めなさい。

答

(3) 底面の半径が 3 cm で、体積が 12π cm^3 の円すいの高さを求めなさい。

答

(4) 底面の半径が 4 cm で、表面積が 36π cm^2 の円すいの母線の長さを求めなさい。

答

(5) 3辺 OA, OB, OC がたがいに垂直で、$OA = 4$ cm、$OB = 5$ cm、$OC = 6$ cm の三角すい $O\text{-}ABC$ の体積を求めなさい。

答

(6) 底面が1辺 6 cm の正方形で、高さが 5 cm の四角すいの体積を求めなさい。

答

(7) 直角をはさむ2辺が 6 cm と 8 cm の直角三角形がある。直角の頂点から斜辺にひいた垂線の長さを求めなさい。

答

(8) 直角をはさむ2辺が 3 cm と 4 cm の直角三角形を、4 cm の辺を軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。

答

(9) 三角すい $O\text{-}ABC$ の辺 OA 上に $OP : PA = 2 : 1$ となる点 P をとり、P を通り底面 ABC に平行な平面で切る。切り口の面積は $\triangle ABC$ の面積の何倍か求めなさい。

答

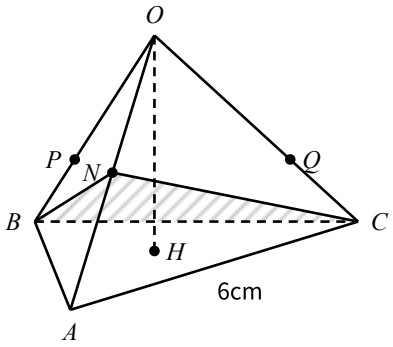
(10) 体積が 54 cm^3 の三角すい $O\text{-}ABC$ の辺 OA, OB, OC 上に、$OP : PA = 1 : 1$、$OQ : QB = 1 : 2$、$OR : RC = 2 : 1$ となる点 P, Q, R をとる。三角すい $O\text{-}PQR$ の体積を求めなさい。

答

練習1　入試の形で解こう（1）　三角すいの高さ・切り口・切断

目標12分

(1) 右の図の三角すい $O\text{-}ABC$ は、底面が1辺 6 cm の正三角形 ABC で、$OA = OB = OC$ である。頂点 O から底面に垂線 OH をひくと、H は $\triangle ABC$ の3つの頂点から等しい距離にある点になる。
この三角すいの体積が $12\sqrt{3}$ cm^3 のとき、高さ OH を求めなさい。



答

(2) 辺 OA の長さを求めなさい。

答

(3) 辺 OA の中点を N とする。3点 N, B, C を通る平面で切ったときの切り口 $\triangle NBC$ の面積を求めなさい。

答

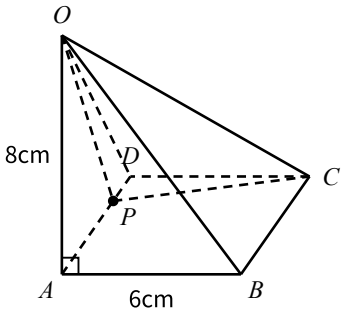
(4) 辺 OB, OC 上に $OP : PB = OQ : QC = 2 : 1$ となる点 P, Q をとる。3点 N, P, Q を通る平面で三角すいを2つに分けるとき、頂点 A をふくむ方の立体の体積を求めなさい。

答

練習2　入試の形で解こう（2）　四角すいと動く点・垂線・回転体

目標12分

(1) 右の図の四角すい $O\text{-}ABCD$ は、底面が $AB = 6$ cm、$AD = 8$ cm の長方形で、辺 OA は底面に垂直、$OA = 8$ cm である。点 P は A を出発し、辺 AD 上を毎秒 1 cm の速さで D まで動き、D で止まる。
四角すい $O\text{-}ABCD$ の体積を求めなさい。



答

(2) $OP = PC$ となるのは、P が出発してから何秒後か求めなさい。

答

(3) 点 A から面 OBC に垂線 AI をひく。線分 AI の長さを求めなさい。

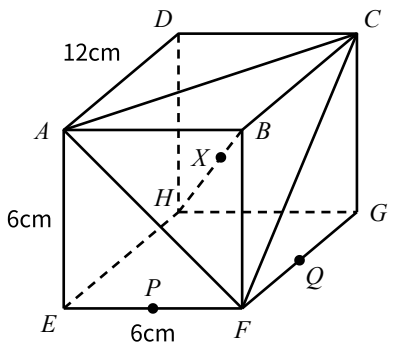
答

(4) P が出発してから6秒後の $\triangle OPC$ を、直線 OA を軸として1回転させてできる立体の体積を求めなさい。

答

確認テスト **10分で解こう**　　点数　　／100点

(1) 右の図の直方体 $ABCD\text{-}EFGH$ で、$AB = 6$ cm、$AD = 12$ cm、$AE = 6$ cm である。
三角すい $B\text{-}ACF$ の体積を求めなさい。 **[25点]**



答

(2) 点 B から $\triangle ACF$ に垂線 BI をひく。線分 BI の長さを求めなさい。 **[25点]**

答

(3) 図のように、対角線 BH と $\triangle ACF$ との交点を X とする。四角すい $X\text{-}EFGH$ の体積を求めなさい。 **[25点]**

答

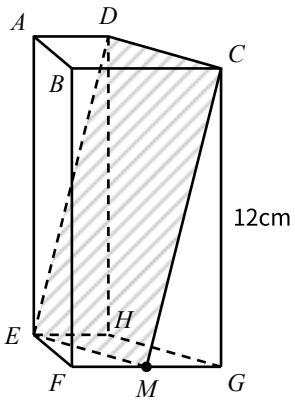
(4) 辺 EF, FG の中点をそれぞれ P, Q とする。4点 A, C, Q, P を通る平面で直方体を切ったとき、頂点 F をふくむ方の立体の体積を求めなさい。 **[25点]**

答

入試にチャレンジ1　台形の四角柱の切断 —— 平行な面の切り口・交点・体積

発展

(1) 右の図の四角柱 $ABCD\text{-}EFGH$ は、底面 $ABCD$ が $AD \parallel BC$、$\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ の台形で、$AB = 4$ cm、$AD = 3$ cm、$BC = 6$ cm、$AE = 12$ cm である。3点 C, D, E を通る平面でこの四角柱を切る。
この平面と辺 FG との交点を M とする。線分 FM の長さを求めなさい。



答

(2) 対角線 AG と切り口との交点を X とする。線分 AX の長さを求めなさい。

答

(3) 頂点 H をふくむ方の立体の体積を求めなさい。

答

解答（答えと短い解き方）

第5講　空間図形

スピード練習　1問1分で

(1)　11 cm

$\sqrt{2^2+6^2+9^2}=\sqrt{4+36+81}=\sqrt{121}=11$

(2)　12 cm

頂点・底面の中心・底面の円周上の点でできる直角三角形で　$\sqrt{13^2-5^2}=\sqrt{144}=12$

(3)　4 cm

高さを h cm とすると　$\dfrac{1}{3}\times\pi\times3^2\times h=12\pi$、$3\pi h=12\pi$、$h=4$

(4)　5 cm

底面積 16π、側面積 $4\pi\ell$。$16\pi+4\pi\ell=36\pi$ より $\ell=5$

(5)　20 cm³

底面を $\triangle OAB$、高さを OC と見る。$\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times4\times5\right)\times6=20$

(6)　60 cm³

$\dfrac{1}{3}\times6^2\times5=60$

(7)　$\dfrac{24}{5}$ cm

斜辺10。面積を2通りに表して　$\dfrac{1}{2}\times6\times8=\dfrac{1}{2}\times10\times h$

(8)　12π cm³

底面の半径 3 cm、高さ 4 cm の円すいができる。$\dfrac{1}{3}\times\pi\times3^2\times4=12\pi$

(9)　$\dfrac{4}{9}$ 倍

切り口の三角形と $\triangle ABC$ は相似で、相似比は $OP:OA=2:3$。面積比は $2^2:3^2=4:9$

(10)　6 cm³

1つの頂点を共有する三角すいの体積比は、3辺の比の積。$54\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=6$

練習1　入試の形で解こう（1）　三角すいの高さ・切り口・切断

(1)　4 cm

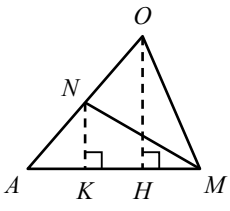
$\triangle ABC=9\sqrt{3}$。$\dfrac{1}{3}\times9\sqrt{3}\times OH=12\sqrt{3}$

(2)　$2\sqrt{7}$ cm

$\triangle HBM$ は $30^\circ, 60^\circ, 90^\circ$ の三角形で $AH=BH=2\sqrt{3}$。$OA=\sqrt{4^2+(2\sqrt{3})^2}$

(3)　12 cm²

$NM\perp BC$。N から AM への垂線 $NK=2$、$KM=2\sqrt{3}$ で $NM=4$。$\dfrac{1}{2}\times6\times4$



断面 $\triangle OAM$（$NK=2$、$KM=2\sqrt{3}$）

(4)　$\dfrac{28\sqrt{3}}{3}$ cm³

体積比は3辺の比の積で $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}$。$12\sqrt{3}\times\dfrac{7}{9}$

練習2　入試の形で解こう（2）　四角すいと動く点・垂線・回転体

(1)　128 cm³

$\frac{1}{3}\times(6\times8)\times8=128$

(2)　$\frac{9}{4}$ 秒後

$OP^2=8^2+t^2$、$PC^2=6^2+(8-t)^2$。等しいとおいて $16t=36$

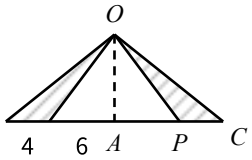
(3)　$\frac{24}{5}$ cm

体積64。$BC\perp OB$ で $\triangle OBC=40$ を底面と見て　$\frac{1}{3}\times40\times AI=64$

(4)　$\frac{512}{3}\pi$ cm³

半径10・高さ8の円すいから、半径6・高さ8の円すいを取りのぞく。

$\frac{8}{3}\pi\times(100-36)$



軸 OA をふくむ平面で切った断面（斜線の部分が立体）

確認テスト　10分で解こう

(1)　72 cm³

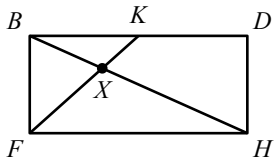
底面を $\triangle ABC$、高さを BF と見る。$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times6\times12\right)\times6=72$

(2)　4 cm

二等辺三角形 ACF の面積は54。体積72を2通りに表して　$\frac{1}{3}\times54\times BI=72$

(3)　96 cm³

X は BH と FK の交点で $BX:XH=1:2$。高さ4で　$\frac{1}{3}\times(6\times12)\times4$



長方形 $BDHF$（K は BD の中点）

(4)　126 cm³

延長の交点 O で $OB=12$。$O\text{-}ABC$（144）から相似比 $1:2$ の $O\text{-}PFQ$（18）を引く。

入試にチャレンジ1　台形の四角柱の切断 —— 平行な面の切り口・交点・体積

(1)　3 cm

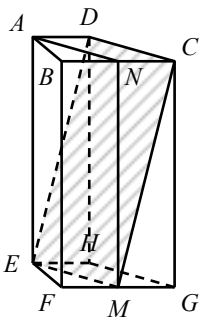
平行な面には平行な切り口。$EMGH$ は平行四辺形で $MG=EH=3$。$FM=6-3$

(2)　7 cm

$AG=\sqrt{52+144}=14$。X は長方形 $ACGE$ の対角線 AG と CE の交点で AG の中点。

(3)　72 cm³

四角柱 $ANCD\text{-}EMGH$（144）を、切り口の平面がちょうど半分に分ける。$144\div2$



四角柱 $ANCD\text{-}EMGH$ を切り口が半分に分ける

くわしい解き方は創心館出版の攻略テキスト（別冊解答）に載っています。