第4講　平面図形　相似の証明 → 長さ・面積

円周角・4点が同じ円周上・中点連結定理で証明 → 三平方の定理（2通り）・相似比で長さ → 底辺の比・平行線で面積／角・弧・おうぎ形・回転体を文字で表す

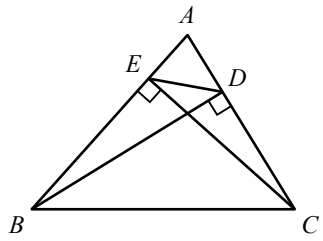
要点の確認	例題	練習（入試の形）	確認テスト
10分	20分	35分	10分

要点1　相似の証明で使う根拠 —— 見えない角を見つける

- **書き方の型**　「$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において」→ 等しい角を**根拠といっしょに**1行ずつ書き、行の終わりに ㋐、㋑、…の印 →「㋒、㋓より、**2組の角がそれぞれ等しいから**」→「$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$」（**対応する頂点の順**に）
- **円周角**　「$\overset{\frown}{BC}$ に対する円周角は等しいから」「線分 AB は直径だから $\angle ACB = 90^\circ$」「円周角は中心角の半分」「等しい弧に対する円周角は等しい」
- **4点が同じ円周上（円周角の定理の逆）**　2点 P, Q が直線 AB について**同じ側**にあって $\angle APB = \angle AQB$ なら、4点 A, B, P, Q は1つの円周上にある。$\angle APB = \angle AQB = 90^\circ$ なら、P, Q は AB を直径とする円の周上にある（AB について反対側でもよい）。→ **かかれていない円**の円周角を使う。
- **中点連結定理**　M, N が辺 AB, AC の中点なら　$MN \parallel BC$、$MN = \dfrac{1}{2}BC$。→「平行線の錯角（同位角）は等しいから」につなぐ。
- **直角三角形の斜辺の中点**　$\angle ADB = 90^\circ$ で M が AB の中点なら　$MA = MB = MD$（D は AB を直径とする円の周上）。二等辺三角形の底角が使える。
- **「$90^\circ - \bigcirc$」の形**　直角が2つある図では、2つの角をどちらも「$90^\circ - \angle\bigcirc$」で表して等しいことを示す（三角形の内角の和・一直線の 180°）。

例題1　4点が同じ円周上にあることを使って証明する

右の図において、$\triangle ABC$ は鋭角三角形である。D は、B から辺 AC にひいた垂線と辺 AC との交点であり、E は、C から辺 AB にひいた垂線と辺 AB との交点である。D と E とを結ぶ。
$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$ であることを証明しなさい。



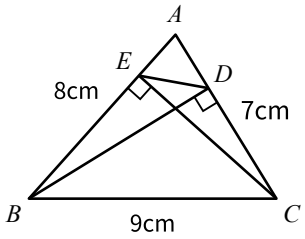
解き方　$\triangle ADE$ と $\triangle ABC$ において　共通な角だから　$\angle DAE = \angle BAC$　…㋐
仮定より $\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$。2点 D, E は直線 BC について同じ側にあるから、4点 B, C, D, E は1つの円周上にある。
$\overset{\frown}{BE}$ に対する円周角は等しいから　$\angle EDB = \angle ECB$　…㋑
3点 A, D, C は一直線上にあるから　$\angle ADE = 180^\circ - 90^\circ - \angle EDB = 90^\circ - \angle EDB$　…㋒
$\triangle EBC$ の内角の和は 180° だから　$\angle ABC = 180^\circ - 90^\circ - \angle ECB = 90^\circ - \angle ECB$　…㋓
㋑、㋒、㋓より　$\angle ADE = \angle ABC$　…㋔
㋐、㋔より、2組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle ADE \backsim \triangle ABC$
※ 図に円はかかれていないが、**直角が2つ**あるので円が見つかる。【別の証明】$\triangle ABD \backsim \triangle ACE$（直角と共通な角）から $AD : AE = AB : AC$、つまり $AD : AB = AE : AC$。これと共通な角 $\angle A$ で「2組の辺の比とその間の角がそれぞれ等しい」としてもよい。

要点2　長さ・面積・文字で表す

- **① 相似比で長さ**　頂点の順に辺を取り出す。$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ なら　$AB : DE = BC : EF = CA : FD$
- **② 三平方の定理を2通りに**　A から BC に垂線 AH をひき $BH = x$ とおくと　$AB^2 - x^2 = AC^2 - (BC - x)^2$（どちらも AH^2）。3辺がわかれば、垂線の足の位置と高さが出る。
- **③ 面積は比で**　高さが同じ → 底辺の比。相似 → 相似比の2乗。**平行線があれば相似な三角形（砂時計形・ピラミッド形）**ができて、線分の比が出る。
- **④ 文字で表す（問1(1)）**　半径 r、中心角 x° のおうぎ形：弧 $2\pi r \times \dfrac{x}{360}$、面積 $\pi r^2 \times \dfrac{x}{360}$。円すい $\dfrac{1}{3}\pi r^2 h$。**中心角＝円周角の2倍。**

例題2　三平方の定理を2通りに → 相似比で長さ

例題1の図で、$AB = 8$ cm、$AC = 7$ cm、$BC = 9$ cm である。
(1)　線分 AE の長さを求めなさい。　　(2)　線分 DE の長さを求めなさい。



解き方　(1)　$AE = x$ cm とおくと $BE = 8 - x$。$\triangle AEC$、$\triangle BEC$ で三平方の定理より
$CE^2 = 7^2 - x^2 = 9^2 - (8 - x)^2$　より　$49 - x^2 = 17 + 16x - x^2$、$16x = 32$、$x = 2$　　**答　2 cm**
(2)　例題1より $\triangle ADE \backsim \triangle ABC$、相似比は $AE : AC = 2 : 7$。$DE = BC \times \dfrac{2}{7} = \dfrac{18}{7}$　　**答　$\dfrac{18}{7}$ cm**
※ 対応は A と A、D と B、E と C。AE に対応する辺は AC（AB ではない）。対応をまちがえやすいので、結論の文字の順で確かめる。

例題3　文字で表す

(1)　$\triangle ABC$ は鋭角三角形で、3点 A, B, C は円 O の周上にある。円 O の半径を r cm、$\angle BAC = a^\circ$ とするとき、A をふくまない方の $\overset{\frown}{BC}$ の長さを a, r を用いて表しなさい。円周率は π とする。
(2)　(1)のとき、おうぎ形 OBC（中心角 $\angle BOC$ が 180° より小さい方）の面積を a, r を用いて表しなさい。
(3)　例題1の図で、線分 BD と線分 CE との交点を H とする。$\angle BAC = a^\circ$ とするとき、$\angle BHC$ の大きさを a を用いて表しなさい。

解き方　(1)　中心角は円周角の2倍で $\angle BOC = 2a^\circ$。　$2\pi r \times \dfrac{2a}{360} = \dfrac{\pi ar}{90}$　　**答　$\dfrac{\pi ar}{90}$ cm**
(2)　$\pi r^2 \times \dfrac{2a}{360} = \dfrac{\pi ar^2}{180}$　　**答　$\dfrac{\pi ar^2}{180}$ cm²**
(3)　四角形 $AEHD$ で $\angle AEH = \angle ADH = 90^\circ$ だから　$\angle EHD = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - a^\circ = 180^\circ - a^\circ$。$\angle BHC$ は $\angle EHD$ の対頂角　　**答　$(180 - a)$ 度**

練習1　スピード練習　根拠・文字の式・長さ・面積の比

目標8分

(1) $\triangle ABC$ の辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とする。$BC = 11$ cm のとき、線分 MN の長さを求めなさい。

答

(2) 4点 A, B, C, D があり、A と D は直線 BC について同じ側にあって、線分 AC と線分 BD は交わっている。$\angle BAC = \angle BDC = 40^\circ$、$\angle ACB = 65^\circ$ のとき、$\angle ADB$ の大きさを求めなさい。

答

(3) 線分 AB を直径とする円 O の周上に点 C がある。$\angle ABC = a^\circ$ とするとき、$\angle BOC$（180° より小さい方）の大きさを a を用いて表しなさい。

答

(4) $\angle ABC = 90^\circ$、$AB = 6$ cm、$BC = a$ cm の直角三角形 ABC を、直線 AB を軸として1回転させてできる立体の体積を a を用いて表しなさい。円周率は π とする。

答

(5) $AB = 5$ cm、$AC = 7$ cm、$BC = 8$ cm の $\triangle ABC$ で、A から辺 BC にひいた垂線と BC との交点を H とする。線分 BH の長さを求めなさい。

答

(6) $\triangle ABC$ の辺 AB, AC の中点をそれぞれ M, N とする。$\triangle ABC$ の面積が 36 cm^2 のとき、四角形 $MBCN$ の面積を求めなさい。

答

(7) (6)で、線分 BN と線分 CM との交点を G とする。$\triangle GBC$ の面積が 12 cm^2 のとき、$\triangle GMN$ の面積を求めなさい。

答

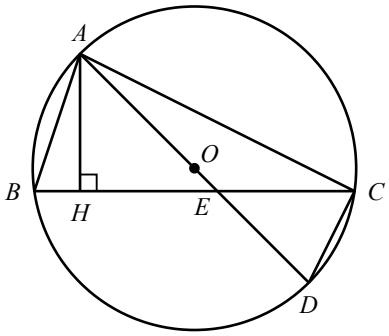
(8) 線分 AB を直径とする円の周上に点 C があり、$AB = 13$ cm、$BC = 12$ cm である。C から AB にひいた垂線と AB との交点を H とするとき、線分 CH の長さを求めなさい。

答

練習2　入試の形で解こう（1）円周角と直径

目標13分

(1) 図において、$\triangle ABC$ は $AB < AC$ の鋭角三角形であり、3点 A, B, C は円 O の周上にある。H は、A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。D は、直線 AO と円 O との交点のうち A と異なる点である。E は、線分 AD と辺 BC との交点である。C と D とを結ぶ。
円 O の半径を r cm、$\angle ABC = a^\circ$ とするとき、おうぎ形 OCD（中心角 $\angle COD$ が 180° より小さい方）の面積を a, r を用いて表しなさい。円周率は π とする。



答

(2) $\triangle ABH \backsim \triangle ADC$ であることを証明しなさい。

(3) $AH = 3$ cm、$BH = 1$ cm、$HC = 6$ cm であるとき、線分 AD の長さを求めなさい。

答

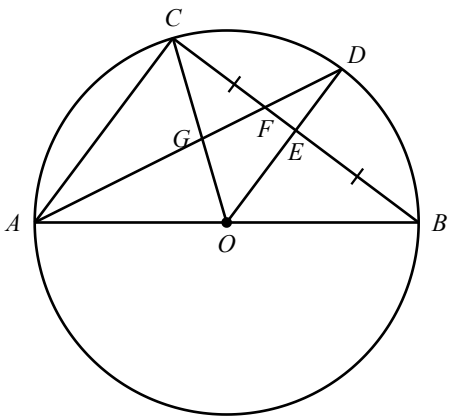
(4) (3)のとき、線分 BE の長さを求めなさい。

答

練習3　入試の形で解こう（2）中点連結定理と円

目標14分

(1) 図において、線分 AB は円 O の直径であり、C は円 O の周上にあって A, B と異なる点である。E は辺 BC の中点である。D は、直線 OE と円 O との交点のうち、直線 BC について A と反対側にある点である。F は、線分 AD と辺 BC との交点であり、G は、線分 AD と線分 OC との交点である。
$\angle ABC = a^\circ$ とするとき、$\angle BAD$ の大きさを a を用いて表しなさい。



答

(2) $\triangle ACF \backsim \triangle DEF$ であることを証明しなさい。

(3) $AB = 10$ cm、$AC = 6$ cm であるとき、線分 CF の長さを求めなさい。

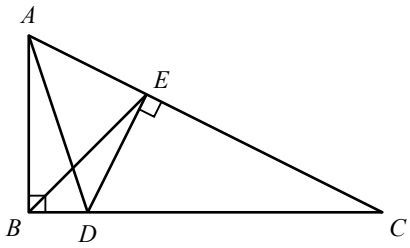
答

(4) (3)のとき、$\triangle ACG$ の面積を求めなさい。

答

確認テスト **10分で解こう**　　点数　　／100点

(1) 図において、$\triangle ABC$ は $\angle ABC = 90^\circ$ の直角三角形である。D は辺 BC 上にあって B, C と異なる点である。E は、D から辺 AC にひいた垂線と辺 AC との交点である。A と D、B と E とをそれぞれ結ぶ。
$\angle BAC = a^\circ$ とするとき、$\angle BDE$ の大きさを a を用いて表しなさい。
［20点］



答

(2) $\triangle CBE \backsim \triangle CAD$ であることを証明しなさい。**［40点］**

(3) $AB = 3$ cm、$BC = 6$ cm、$BD = 1$ cm であるとき、線分 CE の長さを求めなさい。**［20点］**

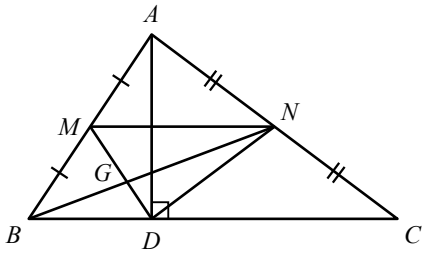
答

(4) (3)のとき、$\triangle BDE$ の面積を求めなさい。**［20点］**

答

入試にチャレンジ1 **中点連結定理と直角三角形の斜辺の中点**　　70点以上をめざす人へ

(1) 図において、$\triangle ABC$ は鋭角三角形である。D は、A から辺 BC にひいた垂線と辺 BC との交点である。M, N はそれぞれ辺 AB, AC の中点である。M と N、D と M、D と N、B と N とをそれぞれ結ぶ。G は、線分 BN と線分 DM との交点である。
$\triangle DMN \backsim \triangle ABC$ であることを証明しなさい。



(2) $AB = 2\sqrt{13}$ cm、$AC = 10$ cm、$BC = 12$ cm であるとき、線分 AD の長さを求めなさい。

答

(3) (2)のとき、$\triangle DGN$ の面積を求めなさい。

答

解答（答えと短い解き方）

第4講　平面図形　相似の証明 → 長さ・面積

練習1　スピード練習　根拠・文字の式・長さ・面積の比

(1)　$\dfrac{11}{2}$ cm

中点連結定理より $MN \parallel BC$、$MN = \dfrac{1}{2}BC = \dfrac{11}{2}$

(2)　65°

$\angle BAC = \angle BDC$ だから4点 A, B, C, D は1つの円周上。$\overset{\frown}{AB}$ の円周角で $\angle ADB = \angle ACB$。

(3)　$(180 - 2a)$ 度

直径だから $\angle ACB = 90^\circ$、$\angle BAC = 90^\circ - a^\circ$。中心角は円周角の2倍だから　$\angle BOC = 2(90^\circ - a^\circ) = 180^\circ - 2a^\circ$

(4)　$2\pi a^2$ cm³

底面の半径 a、高さ 6 の円すい。$\dfrac{1}{3} \times \pi a^2 \times 6 = 2\pi a^2$

(5)　$\dfrac{5}{2}$ cm

$BH = x$ とおくと $AH^2 = 5^2 - x^2 = 7^2 - (8-x)^2$。$25 - x^2 = 49 - 64 + 16x - x^2$ より $16x = 40$、$x = \dfrac{5}{2}$

(6)　27 cm²

$MN \parallel BC$ で $\triangle AMN \backsim \triangle ABC$、相似比 $1:2$、面積の比 $1:4$。$\triangle AMN = 9$、四角形 $MBCN = 36 - 9 = 27$

(7)　3 cm²

$MN \parallel BC$ より錯角が等しく $\triangle GMN \backsim \triangle GCB$、相似比は $MN : CB = 1:2$。面積の比は $1:4$ だから　$12 \times \dfrac{1}{4} = 3$

(8)　$\dfrac{60}{13}$ cm

$\angle ACB = 90^\circ$。$AC = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$。面積を2通りに表して　$\dfrac{1}{2} \times 5 \times 12 = \dfrac{1}{2} \times 13 \times CH$、$CH = \dfrac{60}{13}$

練習2　入試の形で解こう（1）円周角と直径

(1)　$\dfrac{90 - a}{180}\pi r^2$ cm²

$\overset{\frown}{AC}$ に対する円周角は等しいから　$\angle ADC = \angle ABC = a^\circ$。$OC = OD$（半径）だから $\angle OCD = \angle ODC = a^\circ$、$\angle COD = 180^\circ - 2a^\circ$。面積は　$\pi r^2 \times \dfrac{180 - 2a}{360} = \dfrac{90 - a}{180}\pi r^2$

(2)　$\triangle ABH$ と $\triangle ADC$ において

仮定より　$\angle AHB = 90^\circ$　…㋐

線分 AD は円 O の直径だから　$\angle ACD = 90^\circ$　…㋑

㋐、㋑より　$\angle AHB = \angle ACD$　…㋒

$\overset{\frown}{AC}$ に対する円周角は等しいから　$\angle ABH = \angle ABC = \angle ADC$　…㋓

㋒、㋓より、2組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle ABH \backsim \triangle ADC$

決め手は「直径に対する円周角は 90°」（㋑）と「$\overset{\frown}{AC}$ に対する円周角は等しい」（㋓）。

(3)　$5\sqrt{2}$ cm

三平方の定理より　$AB = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$、$AC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$。(2)より $AB : AD = AH : AC$ だから

$\sqrt{10} : AD = 3 : 3\sqrt{5}$、$3AD = 3\sqrt{50}$、$AD = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$

(4)　4 cm

(2)より $DC = \sqrt{5}$。$\triangle ABE \backsim \triangle CDE$（相似比 $\sqrt{2} : 1$）。$BE = x$ として $AE + ED = AD$ から $x = 4$。

練習3　入試の形で解こう（2）中点連結定理と円

(1)　$\left(45 - \dfrac{a}{2}\right)$ 度

中点連結定理で $OD \parallel AC$、同位角で $\angle BOD = 90^\circ - a^\circ$。$\angle BAD$ はその中心角の半分。

(2)　$\triangle ACF$ と $\triangle DEF$ において
O, E はそれぞれ線分 AB, BC の中点だから、中点連結定理より　$OE \parallel AC$
D は直線 OE 上にあるから　$AC \parallel DE$　…㋐
㋐より、平行線の錯角は等しいから　$\angle CAF = \angle EDF$　…㋑
同じように　$\angle ACF = \angle DEF$　…㋒
㋑、㋒より、2組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle ACF \backsim \triangle DEF$

決め手は中点連結定理による $AC \parallel DE$（㋐）と、平行線の錯角（㋑・㋒）。

(3)　3 cm
$CE = 4$、$OE = \dfrac{1}{2}AC = 3$ で $DE = 5 - 3 = 2$。(2)より $CF : EF = 6 : 2$、$CF = 4 \times \dfrac{3}{4} = 3$。

(4)　$\dfrac{72}{11}$ cm²
$\triangle GAC \backsim \triangle GDO$ で $CG : GO = 6 : 5$。$\triangle AOC = 12$ だから $\triangle ACG = 12 \times \dfrac{6}{11}$。

確認テスト　10分で解こう

(1)　$(180 - a)$ 度
$\triangle ABC$ で $\angle ACB = 90^\circ - a^\circ$。$\triangle DEC$ で $\angle DEC = 90^\circ$ だから　$\angle EDC = 90^\circ - (90^\circ - a^\circ) = a^\circ$。$\angle BDE = 180^\circ - a^\circ$

(2)　$\triangle CBE$ と $\triangle CAD$ において
共通な角だから　$\angle BCE = \angle ACD$　…㋐
仮定より $\angle ABD = 90^\circ$、$\angle AED = 90^\circ$ だから、2点 B, E は線分 AD を直径とする円の周上にある。
$\overset{\frown}{DE}$ に対する円周角は等しいから　$\angle DBE = \angle DAE$
$\angle DBE$ と $\angle CBE$、$\angle DAE$ と $\angle CAD$ はそれぞれ同じ角だから　$\angle CBE = \angle CAD$　…㋑
㋐、㋑より、2組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle CBE \backsim \triangle CAD$

決め手は、直角が2つで B, E が AD を直径とする円周上にあること（$\overset{\frown}{DE}$ の円周角で㋑）。

(3)　$2\sqrt{5}$ cm
$AC = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5}$、$CD = 6 - 1 = 5$。(2)より $CB : CA = CE : CD$ だから　$6 : 3\sqrt{5} = CE : 5$、
$3\sqrt{5}\,CE = 30$、$CE = \dfrac{10}{\sqrt{5}} = 2\sqrt{5}$

(4)　1 cm²
$\triangle BCE = 9 \times \dfrac{2\sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = 6$。$DE = \sqrt{5}$ で $\triangle DCE = 5$。$\triangle BDE = 6 - 5 = 1$。

入試にチャレンジ1　中点連結定理と直角三角形の斜辺の中点

(1)　$\triangle DMN$ と $\triangle ABC$ において
$\angle ADB = 90^\circ$ だから、D は線分 AB を直径とする円の周上にあり、AB の中点 M はその円の中心である。よって　$MD = MB$
$\triangle MBD$ は二等辺三角形だから　$\angle MDB = \angle MBD = \angle ABC$　…㋐
M, N はそれぞれ辺 AB, AC の中点だから、中点連結定理より　$MN \parallel BC$　…㋑
㋑より、平行線の錯角は等しいから　$\angle DMN = \angle MDB$　…㋒
㋐、㋒より　$\angle DMN = \angle ABC$　…㋓
同じように、$\angle ADC = 90^\circ$ だから $ND = NC$ で　$\angle NDC = \angle NCD = \angle ACB$　…㋔
㋑より、平行線の錯角は等しいから　$\angle DNM = \angle NDC$　…㋕
㋔、㋕より　$\angle DNM = \angle ACB$　…㋖
㋓、㋖より、2組の角がそれぞれ等しいから　$\triangle DMN \backsim \triangle ABC$

決め手は「直角三角形の斜辺の中点」で $MD = MB$・$ND = NC$、中点連結定理で $MN \parallel BC$、錯角と底角をつなぐ。

(2) 6 cm

$BD=x$ とおくと $AD^2=(2\sqrt{13})^2-x^2=10^2-(12-x)^2$。$52-x^2=100-144+24x-x^2$ より $24x=96$、$x=4$。$AD=\sqrt{52-16}=6$

(3) $\dfrac{18}{5}$ cm²

$\triangle GMN\backsim\triangle GDB$ で $MG:GD=6:4$。$\triangle DMN=\dfrac{1}{2}\times6\times3=9$、$\triangle DGN=9\times\dfrac{2}{5}$。

くわしい解き方は創心館出版の攻略テキスト（別冊解答）に載っています。